Prova d’accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d’un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l’alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. **a)** Justificar que la matriu A és invertible, comprovant que admet inversa per l’esquerra i per la dreta: 4 punts. Si no es justifica correctament, màxim 2 punts. Expressió de A^{-1}: 2 punts.
   b) Calcular la inversa de la matriu A utilitzant que A^{-1}=2 I –A: 4 punts. Si no s’usa aquesta expressió i la matriu inversa està ben calculada, màxim 2 punts.

2. **a)**
- Càlcul correcte de la recta que passa per A i és perpendicular al pla: 2 punts.
- Càlcul correcte de la intersecció d’aquesta recta amb el pla: 2 punts.
- Càlcul correcte del punt simètric: 3 punts.

b) Càlcul correcte de la distància demanada: 3 punts.

3. **a)**
- Càlcul correcte de $f'(x)$ completament simplificada: 3 punts. Si no es dóna completament simplificada, màxim 1 punt.
- Càlcul correcte de $f''(x)$ completament simplificada: 4 punts. Si no es dóna completament simplificada, màxim 2 punts.

b) Estudi correcte dels màxims i mínims: 3 punts.

4.

a) Càlcul correcte de la primitiva $F(x)$: 7 punts.
b) Càlcul correcte de la integral: 3 punts. Si no s’arriba al resultat correcte, màxim 2 punts.

Opció B

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu sense desenvolupar: 6 punts. Si es desenvolupa el determinant màxim, 3 punts.

b) Determinació correcta del rang del conjunt de vectors: 4 punts.

2.

- Determinació correcta del punt $C = (0,0,c)$: 6 punts.
- Determinació de l'equació correcta del pla demanat: 4 punts.

3.

- Comprovació, amb el teorema de Bolzano, que l'equació donada té una solució a l'interval]0,1[: 8 punts.
- Justificació que l'equació només té una solució en aquest interval: 2 punts.

4.

a) Expressió correcta de la integral considerant el canvi de variable donat: 4 punts. Si no es realitza i especifica el canvi dels límits d'integració, màxim 2 punts.

b) Càlcul correcte del valor de la integral: 6 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1.

a) De $A^2 = 2\,A - I$ tenim que $I = 2\,A - A^2 = (2I - A)A$, per tant, tenim que A admet inversa per l'esquerra, i aquesta és la matriu $2I - A$. Prenent $A^{-1} = 2I - A$, tenim que

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$$

Aleshores A és invertible, i a més, $A^{-1} = 2I - A$.

a)

$$A^{-1} = 2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.

Equació de la recta que és perpendicular al pla $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$ i que passa pel punt $A = (1,3,0)$:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-0}{1}.$$

La intersecció del pla π amb la recta r és: $P = (0,1,-1)$.
Per calcular el punt $A' = (a,b,c)$ ens basarem en el fet que $\frac{A+A\prime}{2} = P$, d'on s'obté que $A' = (-1,-1,-2)$.

$$d(A',\pi) = d(A',P) = \sqrt{6}.$$

3.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{(x^2+1)^2}.$$

a) Calculau $f'(x)$ i $f''(x)$ i donau-ne els resultats completament simplificats (6 punts).

$$f'(x) = \frac{10x - 6x^3}{(1+x^2)^3}\ .\ f''(x) = \frac{2(5 - 34x^2 + 9x^4)}{(1+x^2)^4}.$$

b)

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 10x - 6x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, x = -\sqrt{\frac{5}{3}}, x = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{5}{3}}$		$-\infty$
$Signe\ f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			màxim		*mínim*		*màxim*		

4. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

a) Calculau $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot x.

$$F(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + C\,.$$

b) Calculau la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$ (3 punts).

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,.$$

Opció B

1. **a)**

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

c) El rang del conjunt de vectors $\{(1,-2,0,-3), (-1,3,1,4), (2,1,5,-1)\}$ és 2.

2.

Sabem que l'àrea d'un triangle del qual es coneixen els vèrtexs ve donada per

$$\text{àrea}\ \overbrace{ABC}^{\triangle} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,0),\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,c),\ \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2c, c, 2)$$

Utilitzant la identitat anterior s'obté: $\frac{1}{2}\sqrt{5c^2+4} = \sqrt{6} \ \Longrightarrow c = 2$.

Per tant, $C = (0,0,2)$ i l'equació del pla ve donada per:

$$2x + y + z - 2 = 0\,.$$

3.

Considerem la funció $f(x) = x^3 + \lambda\, x^2 - 2\, x - 1$ i l'interval [0,1]. Observau que aquesta funció és contínua a [0,1] i derivable a (0,1). A més, com que $f(1) = \lambda - 2 > 0$ i $f(0) = -1 < 0$, aplicant el teorema de Bolzano podem dir que existeix un punt $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

La derivada té dues arrels, de les quals una és negativa i l'altra és a (0,1). Com només hi ha un zero de la derivada entre 0 i 1, i canvia de signe la funció a 0 i a 1, d'aquí es dedueix la unicitat.

4.

a) Si $x = t^2$ aleshores $dx = 2tdt$, a més, si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ i $x = 1 \Rightarrow t = 1$, per tant,

$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\, dx = 4\int_0^1 \frac{t}{t+3}\, dt\,.$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 4\int_0^1 \frac{t}{t+3}\, dt = 4\int_0^1 \left(1 - \frac{3}{3+t}\right)\, dt = 4[t - 3\ln(3+t)]_{t=0}^1$$

$$= 4\left(1 + 3\ \ln\frac{3}{4}\right).$$