Prova d'accés a la Universitat (2014)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

CRITERIS OPCIÓ A

1
- (a) Càlcul correcte del determinant i solució de l'equació $det(A) = 0$: 2 punts.
  Discussió correcta quan $k \neq 0$: 2 punts.
  Discussió correcta quan $k = 0$: 2 punts.
- (b) Solució correcta amb càlculs: 4 punts. Si tan sols s'indica la solució: 0 punts.

2
- (a) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 5 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.
- (b) Solució correcta de l'apartat: 3 punts, 1.5 punts per qüestió.
- (c) Determinació correcta del màxim de la funció: 2 punts.

3
- (a) Càlcul de $R(3000)$: 1 punt. Indicar que la rendibilitat serà de 600 euros: 1 punt.
- (b) Càlcul correcte i expressió de la derivada: 2 punts. Resolució correcta de l'equació $R'(x) = 0$: 2 punts. Estudi justificat del caràcter de màxim: 2 punts.
- (c) Indicació de la rendibilitat màxima: 2 punts.

4
- (a) Arbre correcte: 2 punts.
- (b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.
- (c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
- (d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
- (e) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

CRITERIS OPCIÓ B

$\boxed{\mathbf{1}}$ Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.

Solució correcta del sistema: 4 punts.

Indicar que les edats són: 15, 12 i 10 anys: 2 punts.

Qualsevol altra situació: 0 punts.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **Primera part**: determinació del problema i de la regió factible.

Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Segona part: determinació de l'extrem de la funció.

Establiment de la funció a optimitzar: 1 punt.

Càlcul i indicació de les butaques que maximitzen la funció: 2 punts.

Indicació del benefici màxim: 1 punt.

Sense càlculs o explicacions que donin suport a les afirmacions, però la funció és correcta: 1 punt.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(a) Càlcul $f(0)$: 1 punt. Càlcul de $f(9)$: 1 punt.

(b) Càlcul correcte i simplificar la derivada: 2 punts. Indicar que $f'(x) < 0$: 2 punts. Indicació que sempre és decreixent la funció: 2 punts.

(c) Càlcul correcte del límit: 1 punt. Indicar que la funció s'estabilitza en 50 individus: 1 punt.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(a) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

(b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

(c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

(d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Considerau el sistema d'equacions donat per

$$\begin{cases} kx + y - z = 1, \\ x - ky + z = 4, \\ x + y + kz = 0, \end{cases}$$

(a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k. (6 punts)

(b) Resoleu-lo quan $k = 1$. (4 punts)

SOLUCIÓ

(a) Consideram les matrius del sistema i l'ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -k & 1 & 4 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$det(A) = -k^3 - 3k = -k(k^2 + 3) = 0 \Longrightarrow k = 0.$$

Per tant, si $k \neq 0$, tenim que $rg(A) = rg(A^*) = 3$ nombre d'incògnites, d'aquí el sistema és compatible determinat.

Si $k = 0$. Com que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A) = 2,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A^*) = 3,$$

en aquest cas, el sistema és incompatible.

(b) El sistema ens queda

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y + z = 4, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

De l'apartat a) sabem que el determinant del sistema $\Delta = -4$. Així

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8}{-4} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{2}$ (a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} x + 4y &\geq 18, && (1) \\ 3x - 2y &\leq 12, && (2) \\ -x - y &\leq -6, && (3) \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. && (4) \end{aligned}$$

Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. Indicau si és o no una regió fitada del pla. (5 punts)

(b) Indicau la posició dels punts $P = (2, 2)$ i $Q = (5, 10)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

(c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor mínim la funció $h(x, y) = 2x + 8y$. (2 punts)

SOLUCIÓ

(a)

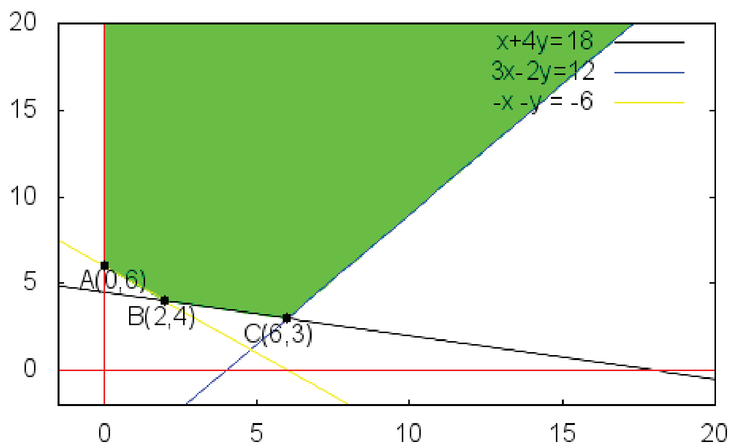

Figura 7: Dibuix de la regió.

A la figura es pot veure que la regió és no fitada.

(b) El punt $Q = (5, 10)$ pertany a la regió i el punt $P = (2, 2)$ és exterior a la regió. Gràficament es pot veure a la figura que les afirmacions anteriors són evidents. Per fer-ho algebraicament és suficient substituir en les inequacions.

El punt P tan sols satisfà les condicions $x \geq 0$, $y \geq 0$ i la condició (2).

(c)

	x	y	$h(x,y) = 2x + 8y$
A	0	6	48
B	2	4	36
C	6	3	36

El mínim de la funció h s'agafa als punts B i C, i val 36. Per tant, en tots els punts del segment BC la funció agafa el valor mínim i la solució és múltiple.

3 Hi ha un fons d'inversió la rendibilitat del qual, en funció de la quantitat invertida en euros, ve donada per la funció $R(x) = \begin{cases} -0.0001x^2 + 0.5x & \text{Si } 0 < x \leq 4000, \\ 400 & \text{Si } x \geq 4000. \end{cases}$

Es demana.

(a) Quina rendibilitat s'obté en invertir 3000 euros? (2 punts)

(b) Quina quantitat x convé invertir per obtenir la màxima rendibilitat? (6 punts)

(c) Quina és aquesta màxima rendibilitat? (2 punts)

SOLUCIÓ

(a) Si volem invertir 3000 euros hem de calcular $R(3000)$ per obtenir la rendibilitat.

$$R(3000) = -0.0001 \cdot 3000^2 + 0.5 \cdot 3000 = 600.$$

La rendibilitat serà de 600 euros.

(b) Per calcular la màxima rendibilitat hem de calcular $R'(x)$.

$$R'(x) = \begin{cases} -0.0002 \cdot x + 0.5 & \text{Si } 0 < x < 4000, \\ 0 & \text{Si } x > 4000. \end{cases}$$

Hem de resoldre l'equació $R'(x) = 0$, per tant, $-0.0002 \cdot x + 0.5 = 0$, d'on $x = \frac{0.5}{0.0002} = 2500$ euros.

Com que $R''(x) = -0.0002 < 0$, a $x = 2500$ euros s'agafa el màxim de la rendibilitat.

(c) La rendibilitat màxima serà

$$R(2500) = -0.0001 \cdot 2500^2 + 0.5 \cdot 2500 = 625 \text{ euros}.$$

4 Una parella per celebrar el seu 25 aniversari planeja passar un cap de setmana gastronòmic triant a l'atzar una de les tres ciutats del País Basc: B, SS, V. No obstant això, es pronostica temps plujós durant aquests dies. En concret, les probabilitats de pluja durant el cap de setmana considerat són de 3/5, 2/7 i 1/4 a B, SS i V, respectivament.

(a) Proporcionau el diagrama en arbre associat al problema. (2 punts)

(b) Quina és la probabilitat que no plogui durant el cap de setmana? (3 punts)

(c) Quina és la probabilitat que la ciutat escollida sigui SS i no plogui durant la visita? (2 punts)

(d) La parella ha tingut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B? (3 punts)

SOLUCIÓ

Definim en primer lloc els esdeveniments que intervenen en el problema.

$B ='' $ Triar la ciutat de Bilbao''
$SS ='' $ Triar la ciutat de Sant Sebastià''
$V ='' $ Triar la ciutat de Vitòria''

$LL ='' $ Cap de setmana plujós''
$\overline{LL} ='' $ Cap de setmana no plujós''

(a) El diagrama en arbre és el següent:

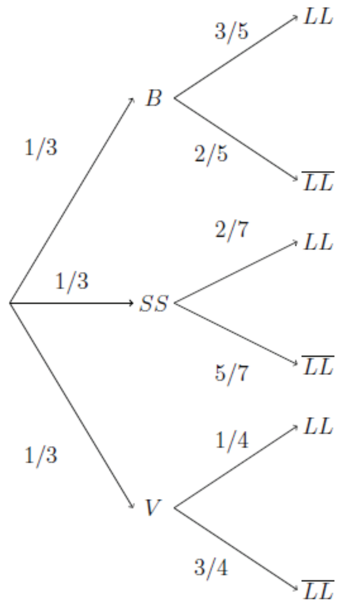

Figura 8: Arbre.

(b) Tenim que

$$p(\overline{LL}) = p(B)\cdot p(\overline{LL}/B) + p(SS)\cdot p(\overline{LL}/SS) + p(V)\cdot p(\overline{LL}/V)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5}{21} + \frac{3}{12} = \frac{87}{140} \approx 0.6214.$$

(c)

$$p(SS\cap\overline{LL}) = p(SS)\cdot p(\overline{LL}/SS) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{21} \approx 0.2381$$

(d) Ens demanen $p(B/LL)$ i per calcular-la hem d'obtenir $p(LL)$.

$$p(LL) = 1 - p(\overline{LL}) = 1 - \frac{87}{140} = \frac{140-87}{140} = \frac{53}{140}$$

Per tant:

$$p(B/LL) = \frac{p(B\cap LL)}{p(LL)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{53}{140}} = \frac{84}{159} \approx 0.53.$$

OPCIÓ B

$\boxed{1}$ La suma de les edats de tres germans d'edats diferents és de 37 anys. La suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys. L'edat del germà mitjà excedeix en 2 l'edat del petit. Calcula les edats dels tres germans. Planteja un sistema d'equacions que permeti calcular les edats i resol-lo.

(10 punts)

SOLUCIÓ
Siguin:

$$x ='' \text{ Edat del gran}''$$
$$y ='' \text{ Edat del mitjà}''$$
$$z ='' \text{ Edat del petit}''$$

Aleshores, el sistema que ens permet calcular les edats és:

$$\begin{cases} x+y+z=37, \\ x+2y+3z=69, \\ y=z+2, \end{cases}$$

d'on $x = 15$, $y = 12$ i $z = 10$.

2 Una fàbrica de mobles produeix dos tipus de butaques S1 i S2. La fàbrica té dues seccions: ebenisteria i tapisseria. Fer una butaca del tipus S1 requereix 1 hora de treball a la secció d'ebenisteria i 2 hores a la de tapisseria. Una butaca del tipus S2 necessita 3 hores d'ebenisteria i 1 de tapisseria. El personal d'ebenisteria subministra un màxim de 90 hores de treball, en tapisseria es disposa d'un màxim de 80 hores. Els beneficis per la venda de cada butaca de S1 i de cada butaca de S2 són de 36 euros i 18 euros, respectivament. Quantes butaques de cada tipus cal produir per maximitzar els beneficis? (10 punts)

SOLUCIÓ
Siguin

$$x ='' \text{ Butaques de tipus S1}''$$
$$y ='' \text{ Butaques de tipus S2}''$$

Les dades del problema es podem resumir a la següent taula.

Temps (hores)	Ebenisteria	Tapisseria
S1	1	2
S2	3	1
Disponible	90	80

Com que hem de maximitzar els beneficis, la funció objectiu és:

$$F(x, y) = 36x + 18y.$$

les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+3y \leq 90, \\ 2x+y \leq 80. \end{cases}$$

La regió la podem veure a la figura següent.

Els punts de tall són: $A = (0, 0)$, $B = (40, 0)$, $C = (30, 20)$ i $D = (0, 30)$.

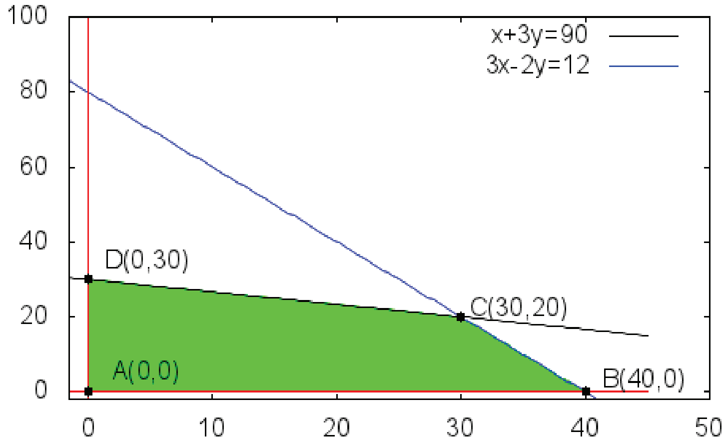

Figura 9: Dibuix de la regió.

	x	y	$F(x,y) = 36x + 18y$
A	0	0	0
B	40	0	1440
C	30	20	1440
D	0	30	540

El màxim s'assoleix als punts B i C, per tant, qualsevol punt amb coordenades senceres al segment que uneix B amb C pot ser solució del nostre problema. El benefici màxim serà de 1440 euros.

$\boxed{3}$ Segons un estudi sobre evolució de la població d'una determinada espècie protegida, es pot establir que el nombre d'individus d'aquesta espècie, durant els propers anys, ve determinada per la funció $f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$, on t és el nombre d'anys transcorreguts.

(a) Calculau la població actual i la prevista per d'aquí a nou anys. (2 punts)

(b) Determinau els períodes de temps en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà. (6 punts)

(c) Estudiau si, segons la funció donada, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, en cas afirmatiu, determinau aquest valor. (2 punts)

SOLUCIÓ

(a)

La població actual: $f(0) = 500.$

La població d'aquí a nou anys: $f(9) = \dfrac{50 \cdot 9 + 500}{9+1} = 95.$

(b) Per determinar l'augment o el decreixement de la població, calculem $f'(t)$.

$$f'(t) = \frac{50(t+1) - (50t+500)}{(t+1)^2} = \frac{-450}{(t+1)^2} < 0.$$

Per tant, la població disminueix sempre.

(c) Per estudiar si la població s'estabilitza amb el temps calculem $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{50t+500}{t+1} = 50.$$

La població tendeix a estabilitzar-se en 50 individus.

$\boxed{4}$ Una família que fa un viatge en cotxe des de Cartagena per la Comunitat Valenciana té un 50% de possibilitats de visitar la ciutat de València, un 40% de visitar Peníscola i un 30% de visitar ambdues ciutats. Es demana

(a) La probabilitat que visiti almenys una de les dues ciutats. (2 punts)

(b) La probabilitat que visiti València però no visiti Peníscola. (3 punts)

(c) La probabilitat que visiti únicament una de les dues ciutats. (3 punts)

(d) La probabilitat que visiti Peníscola, sabent que ha visitat València. (2 punts)

SOLUCIÓ

Siguin els successos

$$V = \{\text{visitar València}\}, \quad P = \{\text{visitar Peníscola}\}.$$

Aleshores:

$$p(V) = \frac{5}{10}, \quad p(P) = \frac{4}{10}, \quad p(V\cap P) = \frac{3}{10}.$$

(a) Ens demanen $p(P\cup V)$

$$p(P\cup V) = p(V) + p(P) - p(V\cap P) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

(b) Ens demanen $p(\text{visitar València però no visitar Peníscola}) = p(V\cap\overline{P})$, per tant,

$$p(V\cap\overline{P}) = p(V) - p(V\cap P) = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

(c) Ens demanen: $p(V\cap\overline{P}) + p(\overline{V}\cap P)$

$$p(\overline{V}\cap P) = p(P) - p(V\cap P) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10} = 0.1,$$

per tant, $p(V\cap\overline{P}) + p(\overline{V}\cap P) = 0.2 + 0.1 = 0.3$.

(d)

$$p(P/V) = \frac{p(P\cap V)}{p(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5} = 0.6.$$