OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 *puntos*).

Solución: a) $a \neq 2$. b) $x = \alpha,\ y = 1 - \alpha,\ z = 0$. c) $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Problema A.2. Se tienen el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$, la recta $s: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π (4 *puntos*).
b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 *puntos*).
c) Discute si el punto $(3,2,1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5,3,1)$ (3 *puntos*).

Solución: a) $x = 1 + \alpha,\ y = 1, z = 1 - \alpha$. b) $-x + 2y + 3z = 4$. c) La recta que pasa por $(3,2,1)$ y $(5,3,1)$ es paralela a s.

Problema A.3 Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

Solución: a) $a + b - c = 22$. b) $f'(1) = 0$ implica $3a + 2b - c = 0$.
c) Una primitiva es $\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{x\sin(\pi x)}{\pi}$. La integral definida vale $-{}^{2}/_{\pi^2} \approx -0.202$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

Solución: a) $A^2 = (AB)A = A(BA) = AB = A$. Análogamente cambiando los papeles de A y B. b) La solución es $a = 0,\ b = 1$. c) El primer determinante vale 6 y el segundo vale 3.

Problema B.2. Dada la recta r: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 *puntos*).
b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ (4 *puntos*).
c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 *puntos*).

Solución: a) $x = \alpha, y = 3 - \alpha, z = -3\alpha + 4$. b) $\pi: x + y = 5$. c) $d(r, \pi) = \sqrt{2}$.

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo *R* de $600\ cm^2$ de área de manera que:
Por encima y por debajo de *R* deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de *R* deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base *x* del rectángulo *R* (3 puntos).
b) El valor de *x* para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Solución: a) $f(x) = 624 + 6\left(x + \frac{400}{x}\right)$. b) El área es mínima cuando $x = 20\ cm$. c) La cartulina de área mínima mide $24\ cm$ de ancho por $36\ cm$ de alto