

SÈRIE 3

1. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Trobeu el valor de a i b perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals.
[2 punts]

La funció f és contínua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ independentment del valor de a i b , ja que es tracta d'una funció polinòmica en cadascun dels intervals. Per tant, caldrà imposar que la funció sigui contínua en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 2$.

Per a $x = -1$ tenim que $f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$. També,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 3) = 1$$

i, finalment,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = -a + b$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x = -1$ si $-a + b = 1$.

D'altra banda, per a $x = 2$ tenim que $f(2) = 2^2 = 4$. D'una banda,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b$$

i, finalment també,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2) = 2^2 = 4.$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x = 2$ si $2a + b = 4$.

Així doncs, la funció serà contínua en tots els reals si i només si es verifiquen simultàniament les dues condicions trobades, és a dir, si a i b són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

Resolem el sistema i trobem que cal que $a = 1$ i $b = 2$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul dels límits: 1 p. Resultat final: 0,5 p.

2. En acabar un curs de pintura, els alumnes reben com a obsequi un estoig amb retoladors i colors. Es regalen dos tipus d'estoigs: els vermells, que contenen 1 retolador i 2 colors i costen 9 €, i els verds, que porten 3 retoladors i 1 color i costen 15 €. L'escola disposa de 200 retoladors i 100 colors per a omplir els estoigs. Necessita preparar almenys 40 estoigs i que el nombre d'estoigs vermells no superi el nombre d'estoigs verds. Amb aquestes dades, l'escola vol calcular el preu que haurà de pagar per aquests obsequis.

- a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions de l'escola.
[1,25 punts]
- b) Calculeu quants estoigs de cada tipus cal preparar perquè la despesa sigui mínima i digueu quina és aquesta despesa mínima.
[0,75 punts]

a) Les dades del problema són:

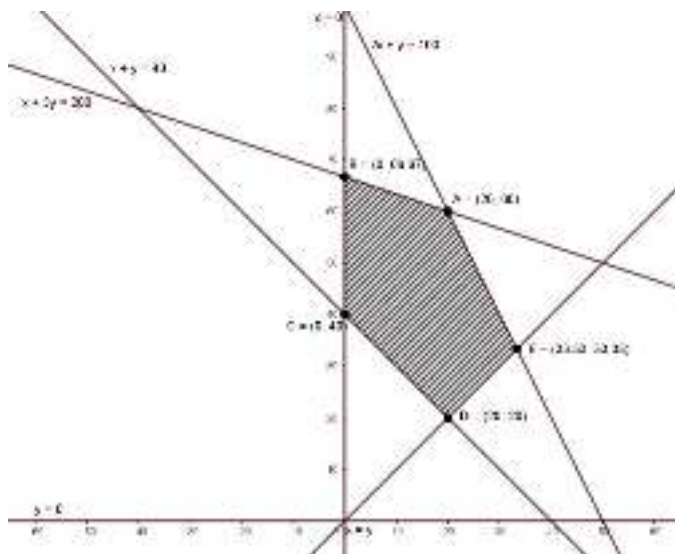
	Retoladors	Colors	Preu
x = nombre d'estoigs vermells	1	2	9
y = nombre d'estoigs verds	3	1	15
Total	$x + 3y$	$2x + y$	$9x + 15y$

Les restriccions venen donades per

$$\begin{cases} x + y \geq 40 \\ x \leq y \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La funció objectiu ve donada per l'expressió: Despesa $(x, y) = 9x + 15y$.

I la regió factible és:



- b) Tenim quatre vèrtexs i sabem que la despesa mínima s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió factible. Calculem en quin:

$$A = (20, 60), \text{ despesa } (A) = 1.080 \text{ €}$$

$$B = (0, \frac{200}{3}), \text{ despesa } (B) = 1.000 \text{ €}$$

$$C = (0, 40), \text{ despesa } (C) = 600 \text{ €}$$

$$D = (20, 20), \text{ despesa } (D) = 480 \text{ €}$$

$$E = (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}), \text{ despesa } (E) = 800 \text{ €}$$

Per tant, la despesa mínima possible és de 480 € i correspon a fer 20 estoigs vermells i 20 de verds.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el mínim: 0,25 p. Obtenció de la despesa mínima: 0,25 p.

3. Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
[2 punts]

Anomenem x la quantitat invertida en l'empresa A, y la quantitat invertida en l'empresa B i z la quantitat invertida en l'empresa C. A partir de les condicions de l'enunciat, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x + z = y \\ 0,02x + 0,05y + 0,07z = 1.500 \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150.000 \end{cases}$$

El resollem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 150.000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & -2 & 0 & -40.000 \\ 0 & 3 & 5 & 70.000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 5 & 10.000 \end{array} \right).$$

A partir d'aquí, obtenim que $z = 2.000 \text{ €}$, $y = 20.000 \text{ €}$ i $x = 18.000 \text{ €}$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

4. La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.

a) Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
[1 punt]

b) Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?
[1 punt]

a) Comencem fent la derivada de $f(x)$. Obtenim $f'(x) = \frac{-400x^2 + 1600}{(x^2 + 4)^2}$. Igualem a 0 la primera derivada per trobar els punts crítics i ens dona un salari de $x = 2$ (milers d'euros) i $x = -2$, que, pel context del problema, no té sentit. Per justificar que en $x = 2$ tenim un màxim, prenem un punt entre -2 i 2 , per exemple $x = 0$ i veiem que la derivada és positiva, per tant, la funció és creixent. Mentre que per a punts més grans que 2 , per exemple $x = 3$, la derivada és negativa, és a dir, la funció és decreixent. Per tant, en $x = 2$ hi ha un màxim. La despesa màxima serà de $f(2) = 100$ euros.

b) Hem de resoldre la inequació $f(x) < 60$, és a dir, $\frac{400x}{x^2 + 4} < 60$, que és equivalent a $400x < 60x^2 + 240$, o bé, dividint cada terme per 20,

$$0 < 3x^2 - 20x + 12$$

Si trobem les arrels de la paràbola $y = 3x^2 - 20x + 12$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = 6$.

Aquesta paràbola és negativa a l'interval $(\frac{2}{3}, 6)$ i és positiva als intervals que són la solució d'aquest apartat: $(0, \frac{2}{3}) \cup (6, +\infty)$. Hem tingut en compte que, pel context del problema, $x \geq 0$. Per tant, la despesa mensual en tabac és inferior a 60 € si el salari és inferior a 666,67 € o si és superior a 6.000 €.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del punt on s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació del fet que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la despesa màxima: 0,25 p. b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Resolució de l'equació de segon grau: 0,25 p. Obtenció de l'interval que és solució: 0,5 p.

5. Resoleu les preguntes següents:

a) Trobeu les matrius A i B que compleixen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ i

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1 punt]

b) Determineu el valor de a , b , c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

a) Observem que $2(A - 2B) - (2A + 3B) = -7B$. Per tant,

$$-7B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. I, d'altra banda, $A = 2B + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Calculem el producte de matrius $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & c-8 \\ 2 & ac-4 \end{pmatrix}$. Per tant, tenim que $\begin{pmatrix} 4 & c-8 \\ 2 & ac-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$. D'aquí obtenim que $b = 4$, $c - 8 = -5$, és a dir, $c = 3$, $d = 2$ i $ac - 4 = -7$, per tant, $3a = -3$, és a dir, $a = -1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A: 0,5 p. Càlcul de la matriu B: 0,5 p. b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 p. Obtenció del valor dels quatre paràmetres: 0,5 p.

6. Sabem que la funció $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ passa pel punt $(2, -5)$ i que les rectes $x = 1$ i $y = 2$ en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu a , b i c .
[2 punts]

Com que es tracta d'una funció racional, l'asímtota vertical la tindrà en el punt que anul·la el denominador; és a dir, cal que $cx + 1 = 0$ per a $x = 1$, per tant, $c = -1$.

Observem que el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{c}$ i també $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c}$. Per tant, tenim que $\frac{a}{c} = 2$ (l'asímtota horitzontal). Per tant, $a = 2c = -2$.

Finalment, sabem que passa pel punt $(2, -5)$, per tant, $f(2) = -5$, és a dir, $\frac{2a+b}{2c+1} = -5$, i deduïm que $b = 9$.

Criteris de correcció: Plantejament del punt on hi ha l'asímtota vertical i obtenció del paràmetre c: 0,5 p. Plantejament del punt on hi ha l'asímtota horitzontal i obtenció del paràmetre a: 0,75 p. Plantejament i obtenció del paràmetre b: 0,75 p.