PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2017).
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos bloques (A y B) de cuatro preguntas cada uno. El alumno debe contestar a uno de los bloques. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *a) Razona qué dimensión debe tener la matriz X para que se cumpla:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ (1 pto)}$$

b) Despeja y calcula la matriz X. (1.5 ptos)

Solución:

a) Si la matriz X puede multiplicarse por la que tiene a su izquierda, entonces es que tiene dos filas. El resultado $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot X$ tiene tantas columnas como X, pero ese resultado debe poder sumarse con $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot X$ y con ello también X tienen 4 columnas. Es decir, X tiene dos filas y cuatro columnas. (1 pto)

b) La expresión de la matriz X es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

0.5 ptos por despejar la primera parte. 0.75 ptos por inversa. Todo correcto 1.5 ptos.

2. *En una empresa hay dos tipos de productos: sillas y mesas. Un técnico de control de calidad contratado tiene la obligación de revisar diariamente entre 4 y 8 sillas, y además entre 2 y 5 mesas. Además, el número de sillas supervisadas debe ser al menos el doble que el número de mesas. El técnico tarda una hora en revisar cada producto y trata de averiguar cuál es el tiempo mínimo diario que le permite cumplir todas las condiciones del contrato.*

a) Expresa la función objetivo. (0.5 ptos)

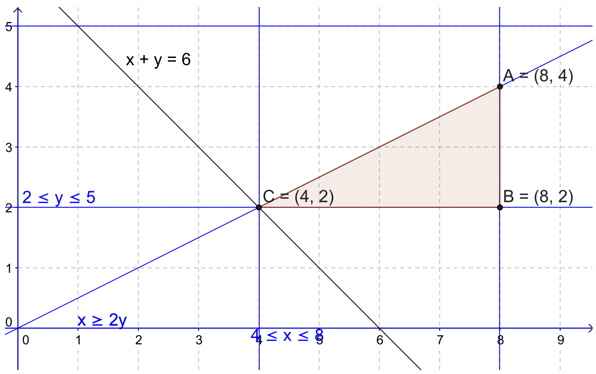
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 ptos)

c) Halla el número de mesas y sillas que debe supervisar diariamente para cumplir las condiciones en un tiempo mínimo. (0.75 ptos)

Solución:

a) Llamando x a las sillas e y a las mesas, la función objetivo será: $Z = x + y$ (0.5 ptos)

b) Las restricciones del problema: $4 \leq x \leq 8 \quad ; \quad 2 \leq y \leq 5 \quad ; \quad x \geq 2y \rightarrow y \leq \frac{1}{2}x$. (0.75 ptos) por restricciones y (0.5 ptos) por la región factible



c) Donde A (8 , 4) ; B (8 , 2) ; C (4 , 2) (0.5 ptos por los vértices) y tenemos que Z (A) = 8 + 4 = 12

Z (B) = 8 + 2 = 10 ; Z (C) = 4 + 2 = 6. Luego la solución es supervisar 4 sillas y 2 mesas, lo cual cumple las condiciones y lleva un tiempo mínimo, en concreto 6 horas. (0.25 ptos por óptimo)

3. *A lo largo de una noche medimos la velocidad del viento en la cima de una montaña, y comprobamos que esa velocidad varía a lo largo de la noche ajustándose a la función:*

$v\,(x) = \frac{3}{16}x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + 10$ *donde* x *está en horas, con* $0 \le x \le 6$ *, y* $v(x)$ *está en metros/segundo. Se pide que calcules:*

a) Cuál es la velocidad del viento cuando se inicia el estudio ($x = 0$ *horas) y cuál es esa velocidad cuando se acaba el estudio (* $x = 6$ *horas). (0.5 ptos)*

b) Entre esos dos momentos, calcula cuándo es máxima la velocidad del viento y a cuántos metros/segundo asciende. (1 pto)

c) Del mismo modo, calcula cuándo es mínima la velocidad del viento en esa noche y cuál es el valor de esa velocidad mínima. (1 pto)

Solución:

a) $v(0) = 10$ m/s (0.25 ptos) y $v(6) = 10$ m/s (0.25 ptos)

Apartados b) y c):

$v'\,(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{21}{4}x^2 + \frac{30}{4}x = \frac{3}{4}x\,(x^2 - 7x + 10)$ (0.25 ptos)

Para localizar los extremos relativos igualamos a 0 la derivada primera.

Si $v'\,(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ o bien } x = 5 \end{cases}$ (0.5 ptos)

Para determinar el carácter de cada uno de esos valores, calculamos la derivada segunda:

$v''\,(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{30}{4}$ y tenemos que: $\begin{cases} v''(0) = \frac{30}{4} > 0 \text{ (mínimo)} \\ v''(2) = -\frac{9}{2} < 0 \text{ (máximo)} \\ v''(5) = \frac{45}{4} > 0 \text{ (mínimo)} \end{cases}$

(0.25 ptos por cada extremo relativo)

Calculamos los valores de la función en esos puntos:

$$\begin{cases} v(0) \;=\; 10 \;\; (\text{mínimo } \textit{relativo en el inicio}) \\ v(2) \;=\; 14 \;\; (\text{máximo } \textit{relativo}) \\ v(5) \;=\; 2,19 \;\; (\text{mínimo } \textit{relativo}) \end{cases}$$

Por lo tanto, la máxima velocidad del viento se produce a las 2 de la madrugada, y en ese momento la velocidad asciende a 14 m/s. (0.25 ptos)

La mínima velocidad del viento se produce a las 5 de la madrugada, y en ese momento la velocidad del viento fue de 2.19 m/s. (0.25 ptos)

4. *Tenemos 100 piezas, de las cuales 5 son defectuosas.*

a) Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas. (0.5 ptos)

b) Calcula la probabilidad de que si examinamos tres piezas distintas al azar, ninguna resulte defectuosa. (1 pto)

c) Si probamos cuatro piezas distintas al azar y la primera y segunda son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que la tercera y la cuarta lo sean? (1 pto)

Solución:

a) $P(Nd) = 95/100 = 0{,}95$ (0.5 ptos)

b) P(3 no defectuosas)= $P(1ND)*P(2ND/1ND)*P(3ND/(1ND\cap 2ND)) = 95/100*94/99*93/98 = 0{,}8559988$. (1 pto)

c) Sea 1D=Primera pieza defectuosa; 2D=Segunda pieza defectuosa; 3D=Tercera pieza defectuosa; 4D=Cuarta pieza defectuosa;

$P(3D \cap 4D/(1D \cap 2D)) = 3/98 * 2/97 = 0{,}0006311803$. (1 pto)

Propuesta B

1. *Los trabajadores de una empresa se reparten en tres grupos distintos: los que trabajan en turno de mañana, los de turno de tarde y los de turno de noche. El número de trabajadores de mañana coincide con la suma de los de tarde más la mitad de los de noche. El doble de los trabajadores de mañana es igual a cinco veces los de noche. Sabiendo que en esta empresa trabajan 110 personas, se pide:*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el número de trabajadores en cada turno. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 pto)

Solución:

x = Nº de trabajadores en turno de mañana;

y = Nº de trabajadores en turno de tarde;

z = Nº de trabajadores en turno de noche.

$$\left.\begin{array}{r} (I)\;\; x = y + \frac{z}{2} \\ (II)\;\; 2x = 5z \\ (III)\;\; x + y + z = 110 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} (I)\;\; 2x - 2y - z = 0 \\ (II)\;\; 2x - 5z = 0 \\ (III)\;\; x + y + z = 110 \end{array}$$

$$La \text{ solución } es: \qquad x = 50 \;;\; y = 40 \;;\; z = 20$$

a) 0.5 ptos por cada ecuación bien planteada.

b) 1 pto por la resolución correcta del sistema planteado.

2. *Dada la función:* $g(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3$ *se pide:*

a) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles máximos o mínimos relativos. (1 pto)

b) Calcula en qué intervalos la función es cóncava y en qué intervalos es convexa. (1 pto)

c) Calcula en qué puntos se sitúan sus posibles puntos de inflexión. (0.5 ptos)

Solución:

a)

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 = x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$$

$$si \quad g'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$g''(x) = 2x^3 - 4x = 2x\,(x^2 - 2)$$
$$g''(0) = 0 \rightarrow x = 0 \;es\; punto\; de \text{ inflexión.}$$
$$g''(2) = 8 \rightarrow x = 2 \;es \text{ mínimo } relativo.$$
$$g''(-2) = -8 \rightarrow x = -2 \;es \text{ máximo } relativo.$$
$$\text{Máximo } relativo: \;(-2\,,\; 3{,}13) \quad \text{Mínimo } relativo: \;(2\,,\; -1{,}13)$$

$$si \quad g''(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

(1 pto) (0.5 ptos por máximo y 0.5 ptos por mínimo)

b)

$$g''(x) = 2x^3 - 4x = 2x\,(x^2 - 2) = 2x \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$g''(x)\ es\ > 0\ en\ \left(-\sqrt{2}\,,\ 0\right)\ U\ \left(\sqrt{2}\,,\ \infty\right) \rightarrow \text{cóncava } hacia\ arriba\,\text{(cóncava)}$$
$$g''(x)\ es\ < 0\ en\ \left(-\infty\,,\ -\sqrt{2}\right)\ U\ \left(0\,,\ \sqrt{2}\right) \rightarrow \text{cóncava } hacia\ abajo\,(convexa)$$

(1 pto. 0.25 ptos por saber condiciones)

c) Como se ha visto en el apartado a), hay tres puntos de inflexión:

$$(0\,,\ 0)\quad;\quad\left(\sqrt{2}\,,\ -0{,}32\right)\quad;\quad\left(-\sqrt{2}\,,\ 2,32\right)$$

(0.5 ptos)

3. *Una almacén compra material a tres empresas: 60 % a la empresa A, 30 % a la empresa B y el resto a la empresa C. Si el 9 % de los materiales de la empresa A tienen algún defecto, el 20 % de los materiales de la B tienen algún defecto y el 6 % de los materiales de la empresa C tienen algún defecto.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un material sea comprado a la empresa A y tenga algún defecto? (0.5 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un material cualquiera del almacén tenga algún defecto? (1 pto)

c) Si un material del almacén tiene algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayan comprado a la empresa B? (1 pto)

Solución:

A=empresa A; B=empresa B; C=empresa C;

D=defecto

P(A)=0.6; P(B)=0.3; P(C)=0.1

P(D/A)=0.09; P(D/B)=0.2; P(D/C)=0.06

a)

$P(A \cap D) = P(D/A) * P(A)$ =0.09*0.6=0.054 (0.5 puntos)

b)

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$=
=$P(D/A) * P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C) * P(C)$= 0.6*0.09+0.3*0.2+0.1*0.06=0.12 (1 punto)

c)

$P(B/D) = P(B \cap D)/P(D) = (P(D/B) * P(B))/P(D)$=(0.2*0.3)/0.12=0.5

(1 punto)

4. *El peso en gramos de un paquete de galletas de un determinado fabricante, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1$ gramo. Se toma una muestra aleatoria de 36 paquetes y se observa que la media del peso de los paquetes de la muestra es 124 gramos.*

a) Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los paquetes de galletas. (1 pto) *b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)*

c) El fabricante afirma que el peso medio de esos paquetes de galletas es de 125 gramos. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 95 %? ¿y con un nivel de significación igual a 0.2? Razona tus respuestas. (1 pto)

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\sigma = 1$ gramo, $\bar{x}$ =124 gramos, n=36

1- α =0.95, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96 (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} \;-\; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\quad \bar{x} \;+\; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC=(124 $-1.96\frac{1}{\sqrt{36}}$, $\quad$ 124+1.96$\frac{2}{\sqrt{36}}$) = (123.6733, 124.3267) (0.5 ptos)

b) Tomando una muestra mayor. (0.5 ptos)

c)

125$\notin$ (123.6733, 124.3267) No no se puede admitir esa afirmación con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)

Con un nivel de significación de 0.2 es lo mismo que decir con un nivel de confianza del 80 % es decir con un nivel de confianza menor por lo cual el intervalo será más estrecho luego tampoco 125 tampoco estaré en dicho intervalo. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767