

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculeu $(A + B)^t$ (2 punts) i $(A \cdot B)^{-1}$ (3 punts) (Nota: A^t vol dir la transposada de la matriu A)

b) Resoleu el següent sistema d'equacions: (5 punts)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x, \\ 2x - y - 3z = 4x - 2, \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

Solució:

a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x, \\ 2x - y - 3z = 4x - 2, \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases} \Rightarrow x = -2, \quad y = 0, \quad z = 2.$$

P2) a) Donada la funció real de variable real $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, es demana:

a.1) Determinau el seu domini i els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades. (2 punts)

a.2) Obteniu els seus màxims i mínims i els intervals de creixement i decreixement. (5 punts)

b) Calculeu la integral següent: (3 punts)

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x} dx.$$

Donau el nombre enter positiu resultat de la integral anterior.

Solució:

- a)** a.1) Com que $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, el numerador és un polinomi i el denominador tan sols s'anul·la a $x=0$, tenim el domini de la funció $\mathbb{R} - \{0\}$, el conjunt dels nombres reals exceptuant el zero.

Punts de tall amb l'eix OX: no n'hi ha, ja que $x^2 + 1$ mai no s'anul·la.

Punts de tall amb l'eix OY: no n'hi ha, ja que a $x=0$ no està definida.

- a.2) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x}$, aleshores $f'(x) = 0$ si, i només si, $x=-1$ o $x=1$. Estudiarem ara el signe de la primera derivada per deduir el caràcter dels punts crítics de $f(x)$.

$$f'(-2) = \frac{3}{4}, \quad f'(-0.5) = -3, \quad f'(0.5) = -3, \quad f'(2) = 3/4.$$

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

<i>Signe $f'(x)$</i>		+		-		-		+	
<i>$f(x)$</i>		↗		↘		↘		↗	
			Màxim (1,f(-1))= (-1,-2)		No està definida		Mínim (1,f(1))= (1,2)		

b)

$$\begin{aligned}
 \int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x} dx &= \frac{3}{4} e^{4x} \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \frac{3}{4} (e^{4 \ln 4} - e^{4 \ln 2}) = \frac{3}{4} (e^{\ln 4^4} - e^{\ln 2^4}) = \frac{3}{4} (4^4 - 2^4) \\
 &= 12(2^4 - 1) = 180.
 \end{aligned}$$

P3) a) Donat el pla $\pi \equiv x + y + z = 4$, determinau la recta r que passa pel punt $P = (1,2,4)$ i és perpendicular a π .

(4 punts)

b) Calculeu el punt d'intersecció de r amb π .

(6 punts)

Solució:

- a) Com que la recta demanada és perpendicular al pla π , el vector normal d'aquest pla serà el vector director de la recta. Per tant, l'equació de la recta ve donada per:

$$(x, y, z) = (1, 2, 4) + \mu(1, 1, 1) = (1 + \mu, 2 + \mu, 4 + \mu).$$

- b) Per calcular el punt que ens demanen hem de determinar el valor de μ . Així, substituint en l'equació del pla:

$$(1 + \mu) + (2 + \mu) + (4 + \mu) = 4 \Rightarrow 7 + 3\mu = 4 \Rightarrow 3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1.$$

Per tant, el punt demanat és: $(0, 1, 3)$.

P4) Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia A és de 0.25 i amb la companyia B és de 0.10.

- a)** Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió? (5 punts)
- b)** Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia A? (5 punts)

Solució:

Siguin els successos: $C = \llarribar amb retard\gg$, $A = \lltriar la companyia A\gg$, $B = \lltriar la companyia B\gg$.

- a) $p(C) = p(A)p(C/A) + p(B)p(C/B) = 0.5 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.10 = 0.175.$
- b) $p(A/C) = \frac{p(A)p(C/A)}{p(C)} = \frac{0.5 \cdot 0.25}{0.175} = 0.71.$ (5 punts)