

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

INDICACIONES A LA SOLUCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

$$a) \quad A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -5 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad AX - B = X \Rightarrow AX - X = B \Rightarrow (A - Id)X = B \Rightarrow X = (A - Id)^{-1} B$$

$$X = (A - Id)^{-1} B = \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.

$$a) \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -m \\ -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 13m = 0, \quad \forall m \neq 0 \text{ existe solución única y es un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.}$$

$m = 0$ es un SISTEMA INCOMPATIBLE INDETERMINADO, $\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*)$.

$$b) \quad \text{Si } m = 1 \text{ la solución es } (1, 2, 1).$$

Ejercicio 3.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-1)(x+1)(x-5)$$

$$a) \quad f'(x) = 3x^2 - 10x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} = 3'4305, \quad x = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} = -0'09716.$$

$$f''(x) = 6x - 10 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{3} = 3'4305\right) = 10'583 > 0 \Rightarrow x = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} = 3'4305 \text{ es mínimo} \\ f''\left(\frac{5-2\sqrt{7}}{3} = -0'09716\right) = -10'583 < 0 \Rightarrow x = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} = -0'09716 \text{ es máximo} \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) \geq 0 \text{ en } [0, 1], \quad \left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^3 - 5x^2 - x + 5) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_0^1 \right| = \frac{37}{12} = 3'08333.$$

Ejercicio 4.

$$P(F) = 0'32, \quad P(B) = 0'16, \quad P(F \cap B) = 0'08$$

$$a) \quad P(\overline{F} \cap \overline{B}) = P(\overline{F \cup B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - [P(F) + P(B) - P(F \cap B)] = 1 - (0'32 + 0'16 - 0'08) = 0'6.$$

$$b) \quad P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{0'08}{0'32} = \frac{1}{4} = 0'25.$$

Ejercicio 5.

$$a) \quad \text{Sea } X \text{ v.a. "Consumo diario de sal"} \approx N(11, 2)$$

$$P(X > 5) = P\left(\frac{X-11}{2} > \frac{5-11}{2}\right) = P(Z > -3) = P(Z < 3) = 0'9987 \Rightarrow 99'87\%.$$

$$b) \quad n=4, \quad \bar{X}_4 \approx N\left(11, \frac{2}{\sqrt{4}}\right) \approx N(11, 1);$$

$$P(10 \leq \bar{X}_4 \leq 12) = P\left(\frac{10-11}{1} \leq \frac{\bar{X}_4-11}{1} \leq \frac{12-11}{1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = -1 + 2 \cdot P(Z \leq 1) = 1 - 2 \cdot 0'8413 = 0'6826.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

$$a) \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1-m \\ -1 & m & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, 1 \text{ no existe } A^{-1}, \text{ y } \text{rango}(A)=2, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$m \neq 0, 1 \Rightarrow \text{rango}(A)=3.$$

$$b) \quad \text{Si } m = -1, A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^*)^t, (A^*)^t \text{ es la matriz adjunta traspuesta, entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.

$$a) \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (m+5)(2-m) = 0 \Rightarrow m = -5, 2 \Rightarrow \begin{cases} m = -5, 2 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE} \\ m \neq -5, 2 \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.} \end{cases}$$

$$b) \quad \text{Si } m = 0 \text{ la solución es } (-9, 2, -8).$$

Ejercicio 3.

$$f(x) = \frac{3}{3+x}$$

$$a) \quad \text{Asíntota vertical: } x = -3. \\ \text{Asíntota horizontal: } y = 0. \text{ Asíntota oblicua: no tiene.}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{-3}{(3+x)^2}, \text{ recta tangente: } y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

$$f'(-1) = \frac{-3}{4}, \quad f(-1) = \frac{3}{2}, \quad y - \frac{3}{2} = \frac{-3}{4}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow y = -0'75x + 0'75.$$

Ejercicio 4.

$$P(A \cap B) = 0'6, P(A \cap \bar{B}) = 0'2, P(A|B) = 0'8 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$a) \quad \begin{cases} P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0'8} = \frac{0'6}{0'8} = 0'75. \\ P(A) = P(A \cup \Omega) = P(A \cup (B \cup \bar{B})) = P(A \cup B) + P(A \cap \bar{B}) = 0'6 + 0'2 = 0'8. \end{cases}$$

$$b) \quad P(A|B) = P(A) \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes.}$$

Ejercicio 5.

$$a) \quad \text{Sea } X \text{ v.a. "Contenido de vitamina C"} \approx N(60, 20)$$

$$P(X \geq 90) = P\left(\frac{X-60}{\sqrt{20}} \geq \frac{90-60}{\sqrt{20}}\right) = P(Z \geq 1'5) = 1 - P(Z < 1'5) = 1 - 0'9332 = 0'0668.$$

$$b) \quad n=16, \bar{X}_{16} \approx N\left(60, \frac{20}{16}\right) \approx N(60, 5); \quad P(\bar{X}_{16} < 70) = P\left(\frac{\bar{X}_{16}-60}{\sqrt{5}} < \frac{70-60}{\sqrt{5}}\right) = P(Z < 2) = 0'9772.$$