MATEMÁTICAS
INDICACIONES A LA SOLUCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & m \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5m - 30 = 0 \Rightarrow m = 6$, ∀m≠6 es un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO pues rg(A)=rg(A*)=3.

Si m = 6 entonces es un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, pues rg(A)=2=rg(A*).

b) Si m = 5 entonces es un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO con solución única: (1, 9, 0).

Ejercicio 2.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $X = (A+BC)^t = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

X no es simétrica, pues $X \neq X^t$, pero sí es invertible ya que $|X| = 27 \neq 0$.

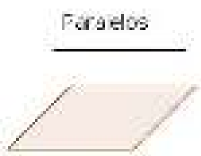
Ejercicio 3. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x$

a) $f'(x) = 6x^2 + 18x - 108 = 6(x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -6 \ y \ x = 3$ son extremos relativos.

$f''(x) = 12x + 18 \Rightarrow \begin{cases} f''(3) = 54 > 0 \Rightarrow x = 3 \ es\ mínimo \\ f''(-6) = -54 < 0 \Rightarrow x = -6 \ es\ máximo. \end{cases}$

b) f(x)<0 en [2,4], $\left| \int_2^4 f(x)dx \right| = \left| \int_2^4 (2x^3 + 9x^2 - 108x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} - 108\frac{x^2}{2} \right]_2^4 \right| = |-360| = 360.$

Ejercicio 4. $\pi \equiv x - 2z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$.



a) $\begin{cases} x = -2y \\ y = -z + 3 \\ x - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 3 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$, $\left| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right|$, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$ la recta r es paralela al plano π.

b) P=(0, 0, 3), π⊥(1,0,–2); $d(P,\pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = 3'5777$

Ejercicio 5.

a) Sea X la v.a. “Tiempo que dura la carga longitud del pie de los varones” ≈ $N(50,20)$

$P(50 \le X \le 80) = P(\frac{50-50}{20} \le \frac{X-50}{20} \le \frac{80-50}{20}) = P(0 \le Z \le 1'5) = P(Z \le 1'5) - P(Z \le 0) = 0'9332 - 0'5 = 0'4332 \Rightarrow 43'32\%$.

b) $P(X < x_0) = 0'99 \Rightarrow P\left(Z = \frac{X-50}{20} \le \frac{x_0 - 50}{20} = z_0 \right) = 0'99 \Rightarrow \frac{x_0 - 50}{20} = z_0 = 2'33 \Rightarrow x_0 = 2'33 \cdot 20 + 50 = 96'6$ horas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) $|A|=\begin{vmatrix}-3 & m & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 13 & -m & -m\end{vmatrix}=4(m-1)(m+13)=0\Rightarrow\begin{cases}\text{m} \neq 1{,}13 \text{ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO rg(A)=3=rg(A*)}\\ \text{m} = 1{,}13 \text{ SISTEMA INCOMPATIBLE pues rg(A)=2} \neq \text{3=rg(A*)}\end{cases}$

b) Si m = -1 la solucón es (1, 1, 1).

Ejercicio 2.

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & -1 & 0\\ m & -m & 1\end{vmatrix}=m^2-1=0\Rightarrow m=\pm1\Rightarrow\begin{cases}m=\pm1, \text{rango}(A)=2, \text{ pues }\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0.\\ m\neq\pm1, \text{rango}(A)=3 \text{ pues } |A|\neq 0.\end{cases}$

b) $m = 0$, $(A^t + A^{-1})^4$, $A = A^t = A^{-1}$, $(A^t+A^{-1})^4=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^4=\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$

Ejercicio 3. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-4x^2}$

a) Asíntotas verticales: x=±1/2. Asíntota oblicua: y=-x/4. Asíntota horizontal: no tiene.

b) Dom f = ℝ- {-1/2, 1/2}; $f'(x)=\dfrac{3x^2(1-4x^2)-x^3(-8x)}{(1-4x^2)^2}=\dfrac{x^2(3-4x^2)}{(1-4x^2)^2}=0\Rightarrow x=0, x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, en $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y f es decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\infty\right)$.

Ejercicio 4.

a) El plano que pasa por los puntos A (1, 0, 1), B (-1, 1, 0) y C (-1, 0, 1) es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-0 & z-1\\ -1-1 & 1-0 & 0-1\\ -1-1 & 0-0 & 1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ -2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=2y+2z-2=0\Rightarrow\pi:2y+2z=2.$$

b) A=(1, 0, 1), P=(-1, -3, 0), $\overline{v_r}$ =(2, 1, 1), $\overrightarrow{PA}$ =(1, 0, 1)- (-1, -3, 0) = (2, 3, 1)

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\overline{v_r}\right|}{\overline{v_r}}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}\right\|}{|\overline{v_r}|}=\frac{|(2,0,-4)|}{|(2,1,1)|}=\frac{\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-4)^2}}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(1)^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{10}{3}}=1'82574.$$

Ejercicio 5. $P(A)=0'6,\ P(\bar{A})=0'4,\ P(E\,|\,A)=0'15\ \ y\ \ P(\bar{E}/\bar{A})=0'25$

a) Teorema de la probabilidad total: $P(\bar{E})=P(A)P(\bar{E}\,|\,A)+P(\bar{A})P(\bar{E}/\bar{A})=0'6\cdot0'85+0'4\cdot0'25=0'51+0'1=0{,}61$.

b) Teorema de Bayes: $P(A\,|\,\bar{E})=\dfrac{P(A)P(\bar{E}\,|\,A)}{P(A)P(\bar{E}\,|\,A)+P(\bar{A})P(\bar{E}/\bar{A})}=\dfrac{0'6\cdot0'85}{0'61}=0'836.$