

MATEMÁTICAS II - SOLUCIONES

Opción A

- ① a) El plano está determinado por el punto $P(0, 1, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$ (director de la recta r) y $\vec{v} = (2, -1, 1)$ (característico del plano π).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\beta \\ y = 1 + \alpha - \beta \\ z = 1 + \alpha + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x + y - z = 0.}$$

b)

$$d(P, \pi) = \frac{|-1 + 1 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

- ② a)

$$f'(x) = \frac{-6}{(x-3)^2}$$

b)

$$\int \left(2 + \frac{6}{x-3} \right) dx = 2x + \ln(|x-3|) + C$$

c) Asíntotas: $x = 3$, $y = 2$.

- ③ a)

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} |A| = (-2)(-3) = 6.$$

b) La matriz inversa de $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = P^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ④

$$\begin{array}{ll} P(A) = 0.6, & P(B) = 0.4 \\ P(\text{Óptima}|A) = 0.08 & P(\text{Óptima}|B) = 0.12 \end{array}$$

a)

$$P(\text{Óptima}) = 0.08 \cdot 0.6 + 0.12 \cdot 0.4 = 0.096 \quad \boxed{9.6\%}$$

$$P(A|\text{Óptima}) = \frac{P(\text{Óptima}|A) \cdot P(A)}{P(\text{Óptima})} = \frac{0.08 \cdot 0.6}{0.096} = 0.50 \quad \boxed{50\%}$$

Opción B

- ① a) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -m \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = 5(m+1)$$

Luego si $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Como las dos últimas filas son proporcionales y las dos primeras linealmente independientes, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada son iguales a 2. Es un sistema compatible indeterminado.

- b) Para $m = 0$, la solución es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 0$.

- c) En la solución del apartado anterior es $z = 0$. Como el parámetro m solamente multiplica a la variable z , la solución anterior vale para cualquier m .

- ② a)

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 5 \\ f'(x) &= -2x + 4 = 0 & \Rightarrow x = 2 \\ f(0) = 5, f(3) = 8, f(2) = 9 & \quad \boxed{\text{máximo: } f(2) = 9} \end{aligned}$$

- b)

$$\begin{cases} y' = -2x + 2 = 4 & \Rightarrow x = -1 \\ \text{para } x = -1, y = 0 & \text{Punto de tangencia: } P(1, 0) \\ \text{Ecuación de la recta: } & y = 4(x - 1) \end{cases}$$

- ③ a)

$$\text{Producto vectorial: } \vec{u} \times \vec{v} = (0, 2, -1) \times (1, -1, 3) = (5, -1, -2)$$

$$\text{Producto escalar: } \vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2, -1) \cdot (1, -1, 3) = -5$$

- b) Coordenadas del punto B: $(4, -3, 2) + (0, 2, -1) = (4, -1, 1)$.

Coordenadas del punto C: $(4, -3, 2) + (1, -1, 3) = (5, -4, 5)$.

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{19}{6}$$

- ④ a) La variable X que representa el número de veces que se obtiene un cinco es una variable binomial $B(3, \frac{1}{6})$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = 0.4213$$

- b)

$$E[X] = 3 \cdot \frac{1}{6} = 0.5$$

- c) Si $C \equiv$ sacar cinco,

$$P(CCC) + P(\overline{C}CC) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{216}$$