PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2019).
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) de cuatro preguntas cada uno. El alumno debe contestar a una de las propuestas. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *Dadas las matrices:*

$$M = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $M{\cdot}X = N + I$ (siendo I la matriz identidad de orden 2). (1.5 puntos)

b) Calcula $N^2 - \frac{1}{2}J{\cdot}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$. (1 punto)

Solución:

a) (0.5 puntos por el cálculo correcto de M^{-1}, 0.5 puntos por despejar bien en la ecuación matricial, todo correcto 1.5 puntos)

$$M{\cdot}X = B + I \Rightarrow X = M^{-1}{\cdot}\,(B+I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

b) (0.5 puntos por el cálculo correcto de N^2, todo correcto 1 punto)

$$N^2 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}{\cdot}J = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}{\cdot}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}{\cdot}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

2. *El gasto (en kilogramos) en leña de una chimenea de un hotel rural que abre durante la temporada que va del mes de septiembre al de junio está en función del mes (tomando como mes 1 el de septiembre y el mes 10 será junio) y se refleja en la función: $G(x) = -50x^2 + 500x$, donde x representa el tiempo transcurrido en meses.*

a) ¿Cuál es el gasto en el mes de diciembre? ¿Y en mayo (mes 9)? (0.5 puntos)

b) ¿Deja en algún momento de encender la calefacción (es decir, el gasto es cero)? (0.5 puntos)

c) ¿En qué mes se produce el mayor gasto y a cuánto asciende? (1.5 puntos)

Solución:

a) Diciembre es el mes número 4$\Rightarrow G(4) = -50{\cdot}4^2 + 500{\cdot}4 = 1200\ kg$ (0.25 puntos)

y mayo es el mes número 9$\Rightarrow G(9) = -50{\cdot}9^2 + 500{\cdot}9 = 450\ kg$ (0.25 puntos)

b) No hay gasto si no enciende la calefacción$\Rightarrow G(x) = 0 \quad \Rightarrow -50x^2 + 500x = 0$ que se produce para $x = 0$ (no está abierto) y $x = 10$ (mes de junio) (0.25 puntos por cada uno)

c) $G'(x) = -100x + 500$; se produce un máximo $\Rightarrow G'(x) = 0$ y $G''(x) < 0$

$-100x + 500 = 0 \ \Rightarrow x = 5$ que corresponde al mes de enero (1 punto)

$G''(x) = -100 \Rightarrow G''(0) = -100 < 0$ por lo tanto es un máximo y su gasto asciende a $G(5) = -50{\cdot}5^2 + 500{\cdot}5 = 1250\ kg$. (0.5 puntos)

3. *Dada la función :*

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{10}{x-4} - 3 & si \quad -1 < x < 6 \\ \frac{x^2}{x^2+4} & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad en $x = -1$. (1 punto)

b) Estudia la continuidad en $x = 4$. (0.75 puntos)

c) Calcula el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$. (0.75 puntos)

Solución: a) La función es continua en $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = -5$.

Para que exista el límite. los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (4x-1) = 4\cdot(-1) - 1 = -5$,

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \left(\frac{-10}{x-4} + 3\right) = \frac{10}{-1-4} + 3 = -2 - 3 = -5$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = -5$ y

$f(-1) = 4\cdot(-1) - 1 = -5$. La función es continua en $x = -1$.

Saber condiciones (0.5 puntos) Todo correcto 1 punto.

b) $x = 4 \in (-1, 6)$ y la función no existe en ese punto.

La función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito ya que $\lim_{x\to 4} \left(\frac{-10}{x-4} + 3\right) = \pm\infty$ (0.75 puntos)

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+4/x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+4/x^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

(0.75 puntos)

4. *Tenemos un colegio con 100 alumnos, de los cuales 5 tienen altas capacidades.*

a) Calcula la proporción de alumnos que no tienen altas capacidades. (0.5 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si preguntamos a tres alumnos al azar, ninguno resulte con altas capacidades. (1 punto)

c) Si preguntamos a cuatro alumnos al azar y el primero y segundo tienen altas capacidades, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero y el cuarto también tengan altas capacidades? (1 punto)

Solución:

a) $P(NA) = 95/100$ =0.95 (0.5 puntos)

b) P(3 no altas capacidades)= $P(1NA) * P(2NA/1NA) * P(3NA/(1NA \cap 2NA)) = 95/100 * 94/99 * 93/98$ =0.8559988. (1 punto)

c) Sea 1A=Primera Altas capacidades; 2A=Segundo Altas capacidades; 3A=Tercer Altas capacidades; 4A=Cuarta Altas capacidades;

$P(3A \cap 4A/(1A \cap 2A)) = 3/98 * 2/97$ =0.0006311803. (1 punto)

Propuesta B

1. *Un gimnasio dispone en sus instalaciones de una sala con bicicletas, otra sala con pelotas para hacer pilates y una tercera sala con sacos para boxeo.*

Las clases siempre se llenan y se utilizan todos los materiales. Esta tarde se han realizado las tres clases y en total han acudido 110 personas (ninguna de ellas ha asistido a más de una clase).

El número de pelotas es el doble que el de sacos y el número de bicicletas supera en 10 unidades al número de pelotas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas unidades hay de cada material. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 puntos.

Siendo $x \equiv$ nº de bicicletas de la sala; $y \equiv$ nº de pelotas de pilates ; $z \equiv$ nº de sacos de boxeo :

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ y - 2z = 0 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

b) La solución $(x, y, z) = (50,\ 40,\ 20)$

Disponen de 50 bicicletas, 40 pelotas y 20 sacos.

Por la solución correcta y razonada del sistema planteada en a) 1 punto.

2. *En la función* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9$ *, se pide:*

a) Calcular los máximos y los mínimos de la función. (1 punto)

b) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad. (1 punto)

c) Calcular los puntos de inflexión. (0.5 puntos)

Solución:

a)

Tiene un máximo en (1,16) (0.5 puntos) y un mínimo en (5,-16) (0.5 puntos).

b)

Es cóncava $\bigcap$ de $(-\infty, 3)$ (0.5 puntos) y convexa $\bigcup$ de $(3, +\infty)$ (0.5 puntos).

c)

Tiene un punto de inflexión en (3,0). (0.5 puntos)

3. *En una fábrica, hay tres robots para realizar productos de acuerdo a los siguiente porcentajes: 60 % los realiza el robot A, 30 % el robot B y el resto el robot C. Además sabemos que el 9 % de los productos realizados por el robot A tienen algún defecto, el 20 % de los productos realizados por el robot B tienen algún defecto y el 6 % de los productos realizados por el robot C tienen algún defecto.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto sea realizado por el robot A y tenga algún defecto? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto realizado en la fábrica tenga algún defecto? (1 punto) *c) Si un producto realizado en la fábrica tiene algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya realizado el robot B? (1 punto)*

Solución:

A=Robot A A; B=Robot B; C=Robot C;

D=defecto

P(A)=0.6; P(B)=0.3; P(C)=0.1

P(D/A)=0.09; P(D/B)=0.2; P(D/C)=0.06

a)

$P(A \cap D) = P(D/A) * P(A)$ =0.09*0.6=0.054 (0.5 puntos)

b)

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$=
=$P(D/A) * P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C) * P(C)$= 0.6*0.09+0.3*0.2+0.1*0.06=0.12 (1 punto)

c)

$P(B/D) = P(B \cap D)/P(D) = (P(D/B) * P(B))/P(D)$=(0.2*0.3)/0.12=0.5

(1 punto)

4. *Para hacer un estudio del número de horas que estudian mensualmente una asignatura de un grado, se tomó una muestra aleatoria de 10 estudiantes y se les preguntó el número de horas mensuales que estudiaban esa asignatura, obteniendo los siguientes valores: 13, 16, 18, 14, 11, 20, 15, 17, 22 y 19 respectivamente. Sabiendo que la variable "Número de horas mensuales que estudian la asignatura" sigue una distribución normal de desviación típica σ=2 horas.*

Solución:

a) Halla el intervalo de confianza para el número de horas medio que estudian la asignatura, con un nivel de confianza del 97 %. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.75 puntos)

c) Los alumnos dicen que el número de horas medio que estudian mensualmente es de 16 horas. ¿Se puede aceptar la afirmación de los estudiantes con un nivel de confianza del 97 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) Obtenemos la media: $\bar{x} = 16.5$ horas, $n = 10$ y $\sigma \ = \ 2$ horas(0.25 puntos)

$1 - \alpha$ =0.97 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=2.17 (0.25 puntos)

IC=($\bar{x} \ - \ Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} \ + \ Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (16.5 - 2.17$\frac{2}{\sqrt{10}}$, 16,5 + 2,17 $\frac{2}{\sqrt{10}}$) =(15.1275 ,17.872427) (0.5 puntos)

b) Tenemos dos opciones para que el intervalo sea de amplitud menor. Disminuir el nivel de confianza del intervalo y la otra es aumentar el tamaño de la muestra. (0.75 puntos)

c) Sí ya que 16 está en el intervalo de confianza al 97 %. (0.5 puntos)