MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

---

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

---

3. El abogado A se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado B se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado C se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) **[1 punto]** Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

---

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) **[1 punto]** Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) **[1 punto]** El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

---

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

---

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

---

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

1. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 1.1, 3.1, 3.3 Estándares del bloque 2: 1.2, 1.3, 2.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Operaciones con matrices: 0,75. Plantear el sistema: 0,25.	
1. b)	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 2 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 20 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2 Estándares del bloque 2: 1.2, 1.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Discutir el sistema: 1. Contestar a cada pregunta: 0,25. Resolver el sistema: 0,5.	

2. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 puntos - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2 Estándares del bloque 3: 1.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 por obtener la expresión de la función y 0,75 por el estudio de la continuidad.	
2. b)	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 2 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 20 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2, 7.2, 7.4 Estándares del bloque 3: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Estudiar la función: 1. Representarla en base al estudio: 0,5. Responder a la cuestión: 0,5.	

3. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 1.1, 2.1, 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2
3. b)	- Bloques de contenidos: - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2

4. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3, 7.5 Estándares del bloque 4: 2.4, 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Obtener el intervalo de confianza: 1.	
4. b)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3, 7.5 Estándares del bloque 4: 2.6
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Obtener el tamaño muestral mínimo: 1.	

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN B

<table>
<tr><td>1. a)</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 2 de Números y álgebra.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 2 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 20 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.3, 7.2, 7.3, 7.4
Estándares del bloque 2: 2.1, 2.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: Plantear las inecuaciones: 0,75.
Representar la región factible: 1.
Cuestión: 0,25.</td></tr>
<tr><td>1. b)</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 2 de Números y álgebra.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 5.1, 7.4
Estándares del bloque 2: 2.1, 2.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: Cada cuestión: 0,5.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2. a)</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 3 de Análisis.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2
Estándares del bloque 3: 3.1</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2. b)</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 3 de Análisis.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 2,25 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 22,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.3
Estándares del bloque 3: 1.2, 1.3, 2.1, 3.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: Estudiar la función: 0,75.
Representarla en base al estudio: 0,5.Si dibuja la función basándose en su valor en varios puntos sin haber hecho ningún estudio, no se le valora la parte correspondiente a la representación gráfica.
Área: 1.</td></tr>
</table>

3. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2
3. b)	- Bloques de contenidos: - Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y Probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 3.1, 3.2, 7.3 Estándares del bloque 4: 1.1, 1.2

4. a)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3, 7.5 Estándares del bloque 4: 2.4, 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Obtener el intervalo de confianza: 1.	
4. b)	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.2, 3.1, 7.2, 7.3, 7.5 Estándares del bloque 4: 2.5, 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: Obtener el intervalo de confianza: 1.	

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución:

a) Puesto que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A^3 \cdot B + C = \begin{pmatrix} 4x+3y \\ -3x-2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+3y \\ -3x+(m-2)y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^2 \cdot D = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 7 \\ -3x & + & (m-2)y & = & -4 \end{array} \right.$$

b) Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ -3 & m-2 & -4 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 4m+1 & 5 \end{array} \right)$$

  Como $4m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1/4$ se tiene que:
  - Si $m = -1/4$, la última fila representa una ecuación que es imposible $(0x + 0y = 5)$, con lo que el sistema es imcompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.
- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & m-2 \end{vmatrix} = 4m+1 = 0 \Longleftrightarrow m = -1/4$$

  se tiene que:

- Para $m=-1/4$, como
$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$
por lo que el sistema es incompatible.
- Para $m \neq -1/4$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m=-1/4$	*S.I.*
$m \neq -1/4$	*S.C.D.*

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq -1/4$ y dicha solución es siempre única.

Si $m=1$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m=1$, se tiene que:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 7 \\ & & 5y & = & 5 \end{array}\right.$$
Resolviendo este sistema escalonado:
$$\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x=(7-3)/4=1 \end{array}\right.$$
- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 4m+1$, con lo que si $m=1$ se tiene que $|A|=5$.
Por otro lado se tiene que
$$|A_x| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 5.$$
Por tanto, la solución es:
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1.$$

---

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x=30$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

Solución:

a) Según el enunciado, si x representa la duración de la llamada en minutos, el coste total en euros de la misma viene dado por la expresión:

$$f(x)=\begin{cases} 1+1{,}2\cdot x & \text{si } 0<x\leq 30, \\ 1+36+0{,}8(x-30) & \text{si } x>30, \end{cases} = \begin{cases} 1+1{,}2\cdot x & \text{si } 0<x\leq 30, \\ 13+0{,}8\cdot x & \text{si } x>30. \end{cases}$$

Comencemos estudiando la continuidad de f en $x=30$:

- La función está definida en 30, siendo $f(30)=1+1{,}2\cdot 30=37$.
- Como
$$\lim_{x\to 30^-} f(x)=\lim_{x\to 30^-}(1+1{,}2\cdot x)=37 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 30^+} f(x)=\lim_{x\to 30^+}(13+0{,}8\cdot x)=37$$
la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha y ambos coinciden, con lo que existe el límite en $x=30$ que coincide con el valor de la función en ese punto.

De todo lo anterior se deduce que f es continua en $x=30$.

b) Según lo visto en el apartado anterior, el dominio de definición de f es el intervalo $(0,\infty)$.

En cuanto a los puntos de corte:

- Es evidente que f no se anula en el intervalo $(0,30]$, ni en el intervalo $(30,\infty)$, puesto que $1+1{,}2x=0 \Leftrightarrow x=-0{,}83\notin(0,30]$ y $13+0{,}8x=0\Leftrightarrow x=-16{,}25\notin(30,\infty)$.
Así pues, se puede concluir que la función no corta al eje de abscisas en su dominio de definición.

Además hemos visto en el apartado anterior que es continua en $x=30$. En el resto de puntos es continua, puesto que está definida mediante funciones continuas.

Además se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1+1{,}2x=1$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(13+0{,}8x)=\infty$.

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x)=1{,}2>0$, con lo que la función f es creciente en el intervalo $(0,30)$.
- En el segundo trozo, $f'(x)=0{,}8>0$, con lo que f también es creciente en el intervalo $(30,\infty)$.

Así pues la función es creciente en todo su dominio.

En cuanto a la derivada segunda, en ambos trozos es $f''(x)=0$, con lo que la función es una recta en ambos intervalos.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 1.

También se podría haber llegado a la representación estudiando la continuidad y viendo que en cada uno de los dos intervalos la función viene definida por una recta que sería convenientemente representada.

Como se puede observar en dicha representación gráfica, en el intervalo $(0,30]$ el máximo se alcanza en $x=30$ y en ese punto la función vale $f(30)=37$, siendo menor en cualquier otro punto de ese intervalo. Por lo tanto, si el coste total ha sido de 45 euros, la llamada ha tenido que durar más de 30 minutos, con lo que el coste se tarifará de acuerdo a la ecuación $13+0{,}8x$. Así, $13+0{,}8x=45\Leftrightarrow x=40$. Con lo cual, una llamada que ha costado 45 euros se sabe que ha durado 40 minutos.

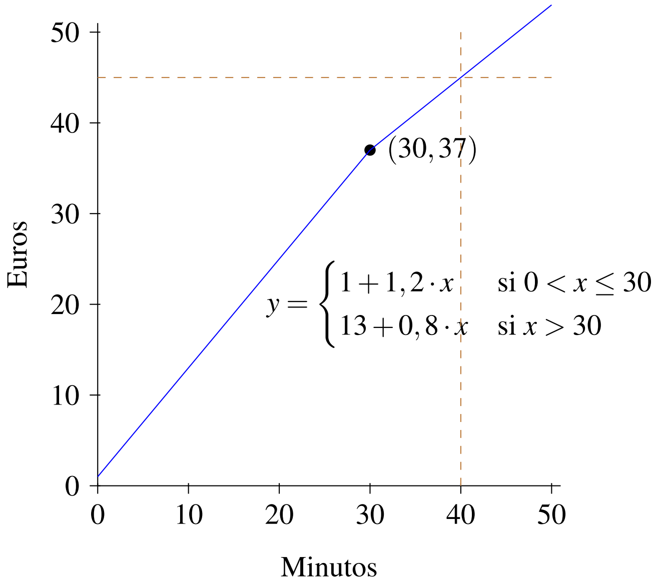

Figura 1: Representación gráfica de f.

3. El abogado A se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado B se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado C se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) **[1 punto]** Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

Solución: Si denotamos por A el suceso «el caso lo llevó el abogado A», por B el suceso «el caso lo llevó el abogado B», por C el suceso «el caso lo llevó el abogado C» y por G el suceso «el caso fue ganado en los tribunales», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{array}{ll} P(A) = 0{,}3 & P(G/A) = 0{,}7 \\ P(B) = 0{,}6 & P(G/B) = 0{,}9 \\ P(C) = 0{,}1 & P(G/C) = 0{,}5 \end{array}$$

a) $P(G) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B) + P(G/C)P(C) = 0{,}7\cdot 0{,}3 + 0{,}9\cdot 0{,}6 + 0{,}5\cdot 0{,}1 = 0{,}8.$

b) $P(B/G) = \frac{P(B\cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/B)P(B)}{P(G)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}6}{0{,}8} = 0{,}675.$

---

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) **[1 punto]** Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si denotamos por X la v.a. «duración, en minutos, de la consulta», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 1{,}5$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 1{,}5)$.

a) Para dicha variable aleatoria tenemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 961$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = 6$.

   El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

   donde $\bar{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

   Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la media, al 95 % de confianza es:

$$\left(6 - 1{,}96\frac{1{,}5}{\sqrt{961}}, 6 + 1{,}96\frac{1{,}5}{\sqrt{961}}\right) = (5{,}905; 6{,}095),$$

   puesto que el valor $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ es el que verifica que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}95$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$.

   Por lo tanto, tenemos una confianza del 95 % de que la duración media de la consulta está entre 5,905 y 6,095 minutos.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

   Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 0{,}2$ y $1-\alpha = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}96\frac{1{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 216{,}09$$

   con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 217 consultas.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) **[1 punto]** El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de horas de trabajo de la máquina A y de la B, respectivamente, en una semana, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+4y & \geq & 80 \\ 4x+2y & \geq & 96 \\ 2x+3y & \geq & 120 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado de la figura 2. Los extremos de dicho recinto son $A=(0,48)$, $B=(6,36)$, $C=(48,8)$ y $D=(80,0)$.

No podría usarse 10 horas la máquina A y 30 la B puesto que el punto $(10,30)$ no pertenece a la región factible $(2(10)+3(30)=110<120)$.

b) El coste de fabricación es $z(x,y)=2500x+2000y$. Así, queremos minimizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{array}{l} z(A)=96000 \text{ euros} \\ z(B)=87000 \text{ euros} \\ z(C)=136000 \text{ euros} \\ z(D)=200000 \text{ euros} \end{array}$$

por lo que el coste mínimo se alcanza si se usa 6 horas la máquina A y 36 horas la máquina B. Esta organización de la producción supone un coste de 87000 euros.

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x)=0{,}02x^2+1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

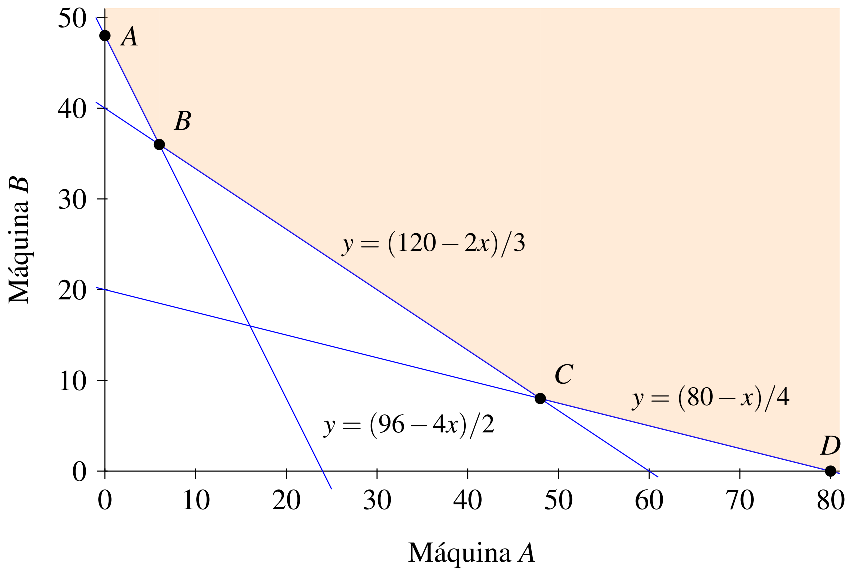

Figura 2: Región factible.

a) **[0,75 puntos]** Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x)=f(x)-9, \forall x\in\mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x=0$ y $x=3$.

Solución:

a) Como $f(x)=0{,}02x^2+1$, entonces $F(x)=\int f(x)dx=0{,}02\frac{x^3}{3}+x+C$. Por otro lado, como nos dicen que $F(0)=5$, se tiene que $F(0)=C=5$, con lo que la función cotización es $F(x)=0{,}02\frac{x^3}{3}+x+5$.

b) Para cualquier número real x se tiene que $g(x)=f(x)-9=0{,}02x^2-8$. El dominio de g son todos los números reales, puesto que está definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

La función g corta al eje de ordenadas en el punto $(0,g(0))$, es decir, en el punto $(0,-8)$. Además como $g(x)=0{,}02x^2-8=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{400}=\pm 20$, se tiene que g corta al eje de abscisas en los puntos $(-20,0)$ y $(20,0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}(0{,}02x^2-8)=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(0{,}02x^2-8)=\infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}02x^2-8}{x}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{0{,}02x^2-8}{x}=-\infty.$$

Como $g(-x)=0{,}02(-x)^2-8=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que g es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$g'(x) = 0{,}04x = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Para averiguar si este punto es mínimo o máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $g''(x) = 0{,}04 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo. Además se deduce que g es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

Como $g''(x) = 0{,}04 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, se puede concluir que g es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

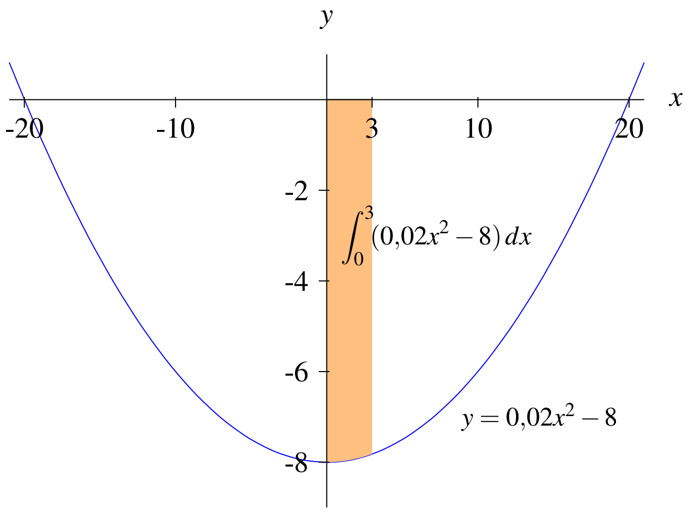

Figura 3: Representación gráfica de g.

El área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$ es igual a:

$$\left| \int_0^3 g(x)dx \right| = \left| \left(0{,}02\frac{3^3}{3} - 8 \cdot 3 \right) - (0) \right| = |-23{,}82| = 23{,}82.$$

---

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

Solución: Si denotamos por A el suceso «el tetrabrik es de marca A», por B el suceso «el tetrabrik es de marca B» y por C el suceso «el tetrabrik está caducado», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 400/500 = 0{,}8 \quad P(C/A) = 0{,}05$$
$$P(B) = 100/500 = 0{,}2 \quad P(C/B) = 0{,}10$$

a) $P(B\cap\overline{C}) = P(\overline{C}/B)P(B) = (1-P(C/B))P(B) = (1-0{,}1)(0{,}2) = 0{,}18$.

b) La probabilidad pedida es: $P(B\cup C) = P(B) + P(C) - P(B\cap C)$.

Ahora bien, como $P(B) = 0{,}2$, $P(C\cap B) = P(C/B)P(B) = 0{,}1(0{,}2) = 0{,}02$ y $P(C) = P(C\cap A) + P(C\cap B) = P(C/A)P(A) + 0{,}02 = 0{,}05(0{,}8) + 0{,}02 = 0{,}06$, se tiene que $P(B\cup C) = 0{,}2 + 0{,}06 - 0{,}02 = 0{,}24$.

---

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

a) Si denotamos por X la v.a. «tiempo semanal, en horas, dedicado a las NT», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 1{,}7$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 1{,}7)$.

Para dicha variable aleatoria tenemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$, obteniendo los siguientes resultados:

Nº de horas semanales	4	5	7	8	9	10	15
Nº de adolescentes	10	15	20	20	15	10	10

Así pues, la media muestral es $\overline{x} = \frac{4\cdot 10+\cdots+15\cdot 10}{100} = \frac{800}{100} = 8$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\overline{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la media, al 90 % de confianza es:

$$\left(8 - 1{,}64\frac{1{,}7}{\sqrt{100}}, 8 + 1{,}64\frac{1{,}7}{\sqrt{100}}\right) = (7{,}72; 8{,}28),$$

puesto que el valor $z_{\alpha/2} = 1{,}64$ es el que verifica que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 90 % de que el uso medio semanal de las NT está entre 7,72 y 8,28 horas.

b) Si representamos por p la proporción poblacional de adolescentes que dedican más de 6 horas semanales a las NT y por $\hat{p}$ la proporción de adolescentes que las dedicaron de los $n = 100$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y que $\hat{p} = 75/100 = 0{,}75$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las NT más de 6 horas semanales, al 90 % de confianza es:

$$\left(0{,}75 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}75(1-0{,}75)}{100}}, 0{,}75 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}75(1-0{,}75)}{100}}\right) = (0{,}679, 0{,}821),$$

puesto que, como ya vimos en el apartado anterior, $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el porcentaje de adolescentes que dedican más de seis horas semanales a las NT está entre el 67,9 % y el 82,1 %.