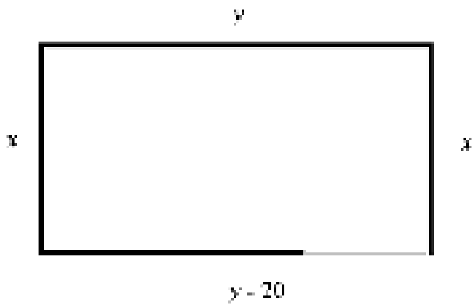
Modelo 1 EBAU 2019

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica pero dejando una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados para colocar después una puerta. Calcular las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera y el valor de dicha área.

SOLUCIÓN

Construimos el recinto rectangular (*no se pide dibujarlo)*



El perímetro de la valla viene dado por $P = x + y + x + y - 20 = 100\,m$ **0.5 ptos**

Siendo el área del terreno a vallar $A = x \cdot y$ **0.25 ptos**

De donde,

$2x + 2y - 20 = 100 \rightarrow 2x + 2y = 120 \rightarrow x + y = 60 \rightarrow y = 60 - x$ **0.5 ptos**

Sustituyendo en la función del área se obtiene,

$A = x \cdot y = x(60 - x) = 60x - x^2$ **0.25 ptos**

Hallamos la primera derivada del área para calcular el punto crítico,

$A' = 60 - 2x$ **0.25 ptos**

Igualamos a cero $60 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{60}{2} \rightarrow x = 30$ **0.25 ptos**

Comprobamos si es máximo o mínimo mediante el criterio de la segunda derivada,

$A'' = -2 < 0$, podemos afirmar que existe un máximo en $x = 30\ m$ **0.25 ptos**

Las dimensiones del terreno de área máxima serán

$x = 30\ m$; $y = 30\ m$ siendo el área: $900\ m^2$ **0.25 ptos**

2. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2.

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2=A$

b) Calcular el valor de x para que $A-I_2=B^{-1}$

c) Calcular el valor de x para que $A\cdot B=I_2$

SOLUCIÓN

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2=A$

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **0.25 ptos**

Entonces si $B^2=A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\ +1=2 \to x=1$ **0.25 ptos**

b) Calcular el valor de x para que $A-I_2=B^{-1}$

Calculemos que es posible calcular la matriz inversa de B

Comprobamos que es una matriz regular $|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \exists\ B^{-1}$ **0.25 ptos**

$\left.\begin{matrix} B_{11}=1; B_{12}=-1 \\ B_{21}=-1; B_{22}=0 \end{matrix}\right\}$ $Adj\,(B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $[Adj\,(B)]^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot(Adj\,(B))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **0.5 ptos**

Por otro lado,

$A-I_2=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ **0.5 ptos**

La igualdad se cumple si,

$A-I_2=B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\ =0$ **0.25 ptos**

c) Calcular el valor de x para que $A\cdot B=I_2$

$A\cdot B=I_2 \Leftrightarrow A=B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x\ +1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\ =-1$ **0.5 ptos**

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x-y+3=0$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z=0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2

SOLUCIÓN

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$

Sea la recta *t* de intersección de los planos π_1 y π_2. Su ecuación se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos,

$$t \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}, \textit{sea}\, z=\lambda, \lambda \in R \text{, } \textit{entonces haciendo } z=\lambda : \begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=\lambda \end{cases},$$ **0.5 ptos**

Buscamos la ecuación paramétrica, sumando ambas ecuaciones obtenemos: $3x=-3+\lambda \quad x=-1+\frac{1}{3}\lambda$, luego despejando $y=2+\frac{1}{3}\lambda$, luego la ecuación de *t* es:

$$t \equiv \begin{cases} x=-1+\frac{1}{3}\lambda \\ y=2+\frac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \lambda \in R$$ **0.5 ptos**

La recta *s* por ser paralela a los planos π_1y π_2, será paralela a la recta t de intersección de ambos planos, luego su vector dirección será $\vec{v}_s=(1,1,3)$, y como pasa por el punto B(2, 2, 3), sus ecuaciones paramétricas y continuas serán:

$$s \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=2+\mu \\ z=3+3\mu \end{cases}, \mu \in R \quad s \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$$ **0.5 ptos**

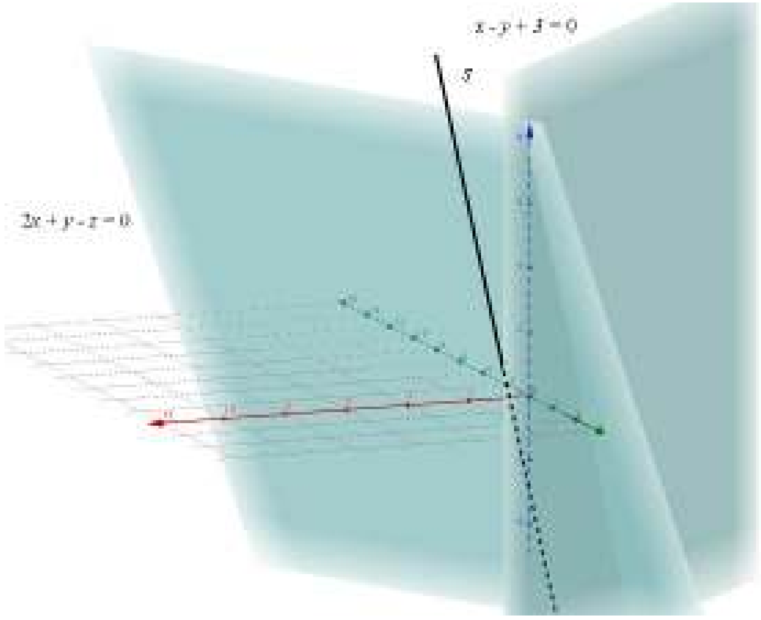
Otra forma:

Sean $\vec{A}_1=(1,-1,0)$ y $\vec{A}_2=(2,1,-1)$ **0.5 ptos**

los vectores normales a los planos π_1y π_2 respectivamente, entonces el vector dirección de la recta *s* paralela a ambos planos viene dado por $\vec{v}_s=A_1 \times A_2=(1,1,3)$ **0.5 ptos**

Con vector y punto damos la ecuación de la recta *s*

$$s \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=2+\mu \\ z=3+3\mu \end{cases}, \mu \in R \quad s \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$$ **0.5 ptos**



b) El ángulo que forman los planos π_1y π_2

El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman los vectores perpendiculares a cada uno de ellos. Si observamos las ecuaciones generales de los planos π_1 y $\pi_2$dos vectores perpendiculares a cada uno de ellos serán: $\vec{A_1}=(1,-1,0)$ y $\vec{A_2}=(2,1,-1)$ **0.5 ptos**

Por tanto,

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{A_1}\cdot\vec{A_2}|}{|\vec{A_1}|\cdot|\vec{A_2}|}=\frac{|1.2+(-1)\cdot 1+0\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{2-1+0}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{12}} \qquad \alpha=73^{'}22^{o}$$ **0.5 ptos**

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

SOLUCIÓN

Definimos la variable X : "tiempo de devolución de un préstamo de 18000€"

X ~ N (60, 8)

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

P(X < 70) = P(Z < $\frac{70-60}{8}$ ¿ $=P(Z<1.25)=0.8944$ **0.75 ptos**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

P (X > 4) = $\left(Z > \frac{48-60}{8} \right) = P(Z > -1.5) = P(Z < 1.5) = 0.9332$ **0.75 ptos**

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

P (4 < X < 6) = $P(48 < X < 72) = P(X < 72) - P(Z < 48) = ¿$

$¿ P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) = 0.9332 - (1 - 0.9332) = ¿$

$¿ 0.9332 - 0.0668 = 0.8664 ; 86{,}64\,\%$ **1 pto**

Modelo 1 EBAU 2019

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función *f*, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x)=\begin{cases} a-x \; si \; x\leq 1 \\ \dfrac{b}{x}-\ln x \; si \; x>1 \end{cases}$$

Calcular los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en todo su dominio. Escribir la función resultante.

SOLUCIÓN

La función dada está definida por partes, y es continua tanto para valores de $x\leq 1$ como $x>1$. Analizamos su continuidad en $x = 1$ **0.25 ptos**

Criterio de continuidad (completo, incluso f(1)) **0.25 ptos**

f es continua si

1) $\exists f(1)$

2) $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$

3) $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

Comprobamos $f(1)=a-1$

Hallamos $\lim_{x\to 1} f(x)$ comprobando para qué valores de *a* y *b* si sus límites laterales existen y son iguales

$$\lim_{x\to 1^-}(a-x)=a-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{b}{x}-\ln x\right)=b-0$$ **0.25 ptos**

Por tanto, los límites laterales son iguales si $b=a-1$ (I) **0.25 ptos**

La función es continua si se cumple $b=a-1$

Comprobamos derivabilidad en x=1. Esta exigencia es mayor, pero con ella aseguramos que sea derivable.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 \; si \; x<1 \\ \dfrac{-b}{x^2}-\dfrac{1}{x} \; si \; x>1 \end{cases}$$ **0.25 ptos**

Hallamos los límites laterales,

$$\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1$$

$\lim\limits_{x \to 1^{+¿}} \left(\frac{-b}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = -b-1¿$ **0.25 ptos**

Los límites laterales son iguales si $-b-1=-1 \to b=0$ **0.25 ptos**

Y sustituyendo en (I) obtenemos $a=1$ **0.25 ptos**

Conclusión: la función es continua y derivable en $x = 1$ para $a = 1$ y $b = 0$

La función que resulta es

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, si x \le 1 \\ -lnx, si x > 1 \end{cases}$$ **0.25 ptos**

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left. \begin{array}{l} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

SOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{r} 2X+3Y=A(I) \\ X-2Y=B(II) \end{array} \right\} \to -2(II) \to \left. \begin{array}{r} 2X+3Y=A \\ -2X+4Y=-2B \end{array} \right\} \to (I)-2(II) \to 7Y=A-2B \to$$

$$Y=\frac{1}{7}(A-2B)$$ **0.5 ptos**

$$X=\frac{1}{2}(A-3Y)$$ **0.5 ptos**

$$Y=\frac{1}{7}(A-2B)=Y=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -14 & 6 & -2 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 14 & - \\ 21 & - \end{pmatrix}\right.$$

0.75 ptos

$$X=\frac{1}{2}(A-3Y)=X=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)=¿$$

$$¿\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ **0.75 ptos**

Otra forma:

$$\left. \begin{array}{r} 2X+3Y=A(I) \\ X-2Y=B(II) \end{array} \right\} \to -2(II) \to \left. \begin{array}{r} 2X+3Y=A \\ -2X+4Y=-2B \end{array} \right\} \to (I)-2(II) \to 7Y=A-2B$$

$$7Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \to Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -7 & 3 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a $r$que pasa por el punto $P(-4,17,0)$

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y Bson simétricos.

SOLUCIÓN

a) Calcular la recta perpendicular a $r$que pasa por el punto $P(-4,17,0)$

La recta *r* tiene por vector director $\overrightarrow{AB}$ =¿ (-4, 4, 0) **0.25 ptos**

La ecuación paramétrica (usando A) de la recta es: $r\equiv\left|\begin{array}{l} x=2-4t\\ y=-1+4t\,,t\in R\\ z=1\end{array}\right.$ **0.25 ptos**

La ecuación paramétrica (usando B) de la recta es: $r\equiv\begin{cases} x=-2-4t\\ y=3+4t\quad,t\in R\\ z=1\end{cases}$ **0.25 ptos**

Construimos el vector de un punto cualquiera de la recta *r* al punto P dado,

$\overrightarrow{PX}$ (6-4t, -18+4t, 1) (usando A); $\overrightarrow{PX}$ (2-4t, -14+4t, 1) (usando B)

El producto escalar tiene que ser cero para que sean perpendiculares:

$\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{AB}$ = -24+16*t* – 72 + 16 *t* = 0; -96 + 32 *t* = 0; *t* = 3 (usando A)

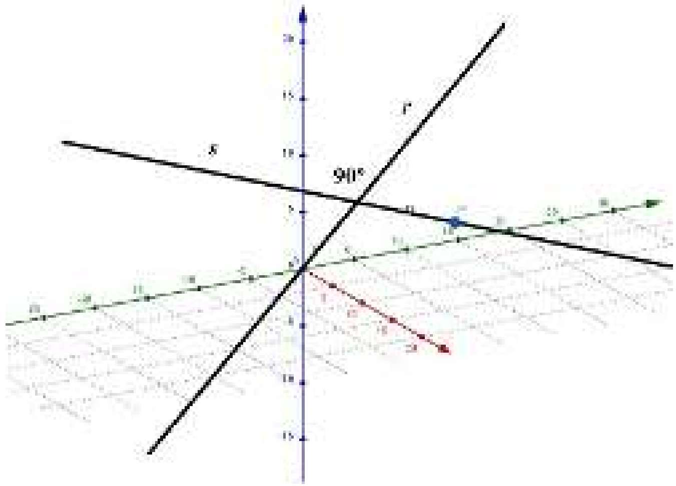
$\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{AB}$ = -8+16 *t* – 56 +16 *t* = 0; -64 + 32 *t* = 0; *t* = 2 (usando B)

En ambos casos,

Por tanto, el vector perpendicular es: $\overrightarrow{PX}$=¿¿ (-6, -6, 1) **0.25 ptos**

Y la ecuación de la recta buscada es: $s\equiv\begin{cases} x=-4-6\mu\\ y=17-6\mu\,,\mu\in R\\ z=\mu\end{cases}$ **0.25 ptos**

$s\equiv\frac{x+4}{-6}=\frac{y-17}{-6}=z$ (*Cualquiera de las dos ecuaciones*)



b) El vector $\overrightarrow{AB}$=¿ (-4, 4, 0) será el vector director de la recta que contiene a los puntos A y B, pero también el vector normal del plano del que son simétricos. **0.25 ptos**

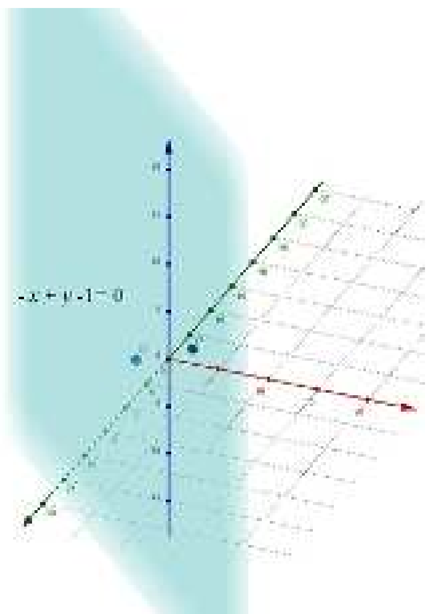
Ecuación general del plano: - 4x + 4y + D = 0 **0.25 ptos**

Buscamos el punto medio M del segmento AB que será el punto que estará en el plano de simetría:

M = A + ½ $\overrightarrow{AB}$ = (2, -1, 1) + (-2, 2, 0) = (0, 1, 1) **0.25 ptos**

Este punto estará en el plano: -4·0+4·1+D=4+D=0; luego D= -4 **0.25 ptos**

Por tanto el plano de simetría es: - 4x + 4y = 4; o lo que es lo mismo: - x + y = 1 **0.25 ptos**



4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

SOLUCIÓN

Se definen los eventos: **0.25 ptos**

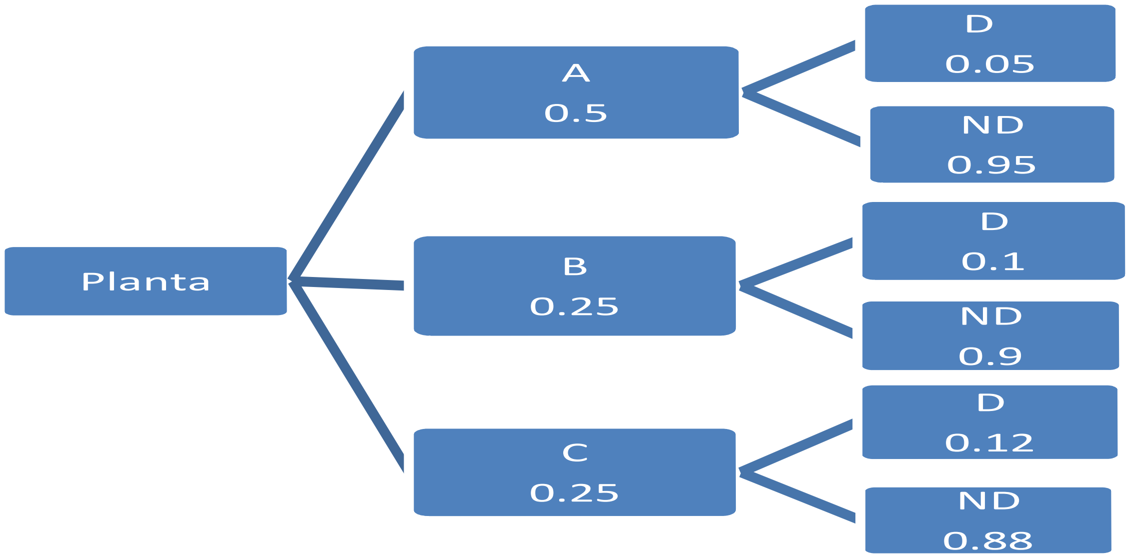
A: componentes fabricados por el fabricante A

B: componentes fabricados por el fabricante B

C: componentes fabricados por el fabricante C

D: circuito con componentes defectuosos

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. **0.25 ptos**



b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total,

P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)=

= (0.5) (0.05) + (0.25) (0.1) + (0.25) (0.03) = 0.08 **0.75 ptos**

Existe un 8% de probabilidad de que un circuito ensamblada en la planta contenga componentes defectuosos. **0.25 ptos**

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

Teorema de Bayes

$$P(B/ND)=\frac{P(B)P(ND/B)}{P(ND)}=\frac{0.25(1-0.1)}{(1-0.08)}=0.2445$$ **0.75 ptos**

Existe un 24.5% de probabilidad de que un circuito que no tiene componentes defectuosos, dichos componentes hayan sido vendidos por el proveedor B **0.25 ptos**