OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z & = & \alpha \\ x & -2y & +2z & = & 5 \\ 3x & -y & +5z & = & \alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Solución. a) El determinante de la matriz de coeficientes del sistema vale -1, luego el sistema es siempre compatible y determinado. b) $(x, y, z) = (7, -4, -5)$. c) La solución es $\alpha = 1$.

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Solución. a) $\frac{32}{3} \cong 10{,}66$ ul. b) 24 ua. c) $\frac{2^8}{3} = \frac{256}{3} \cong 85{,}33$ uv.

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Solución. a) $]-\infty, +\infty[$. $+\infty$, $-\frac{3}{5}$. b) $y = x - 1$. c) $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$, área = $8 + \ln 5$ ua.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Solución. a) $2 \neq \alpha \neq 5$. b) $(x, y) = \lambda(1, 1)$ para cualquier λ real. c) La solución es $\beta = 2^{100}$.

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Solución. a) Si $\beta \neq 3$, r y π se cortan en un punto; si $\beta = 3$ y $\alpha \neq 6$, r es paralela no contenida en π; si $\beta = 3$ y $\alpha = 6$, r está contenida en π. b) 0. c) $x + 2y + 3z = 0$.

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 *puntos*)

Solución. a) $\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$. b) $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. c) $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$ y $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$. d) $\frac{20}{3}$.