

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta $s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$ y pasa por el punto $P \equiv (-1, 3, 1)$.

(2.5 puntos)

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2-x}} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 7} \right) \quad (1.25 \text{ puntos})$$

P4) Sea la función $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2} \right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 2]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2 \quad (2.5 \text{ puntos})$$

P6) Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

P7) Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ y } g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)