



# Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

---

## Matemàtiques

### Serie 5

---

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

---

1. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ .

a) Determine para qué valores de  $a$  existe  $A^{-1}$ .

[1 punto]

b) Calcule  $A^{-1}$  para  $a = 0$ .

[1 punto]

2. En el espacio tridimensional considere la recta  $r: (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$  y los planos  $\pi_1: x + y + z = -1$  y  $\pi_2: (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$ .

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del plano  $\pi_2$ .

[1 punto]

b) Encuentre los dos puntos de la recta  $r$  que equidistan de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

[1 punto]

NOTA: Puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano de

ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$  con la expresión  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

3. Sea la función  $f(x) = e^x - x - 2$ .

a) Demuestre que la función  $f$  tiene una raíz (un cero) en el intervalo  $[0, 2]$ .

[1 punto]

b) Compruebe que la función es monótona en el intervalo  $[0, 2]$  y calcule las coordenadas de los puntos mínimo absoluto y máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

[1 punto]

4. Sean los planos de  $\mathbb{R}^3$   $\pi_1: -y + z = 2$ ,  $\pi_2: -2x + y + z = 1$  y  $\pi_3: 2x - 2z = -1$ .
- a) Calcule la posición relativa de los tres planos.  
[1 punto]
- b) Compruebe que el plano  $\pi_3$  es paralelo a la recta definida por la intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .  
[1 punto]
5. Sean  $x$  e  $y$  las medidas de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 2.
- a) Compruebe que la superficie del rectángulo, en función de  $x$ , viene dada por la expresión  $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ .  
[1 punto]
- b) Calcule los valores de las medidas  $x$  e  $y$  para los cuales la superficie del rectángulo es máxima y calcule el valor de esta superficie máxima.  
[1 punto]
6. Encuentre todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  que sean inversas de ellas mismas, es decir, que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
[2 puntos]

