

## SÈRIE 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

### Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**
  - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
  - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
  - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
  - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

a)

Estudieu per a quins valors de  $\lambda$  el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda + 5) = 5\lambda(\lambda + 1)$$

CAS I: Si  $\lambda \neq 0$  i  $\lambda \neq -1$

$$\text{Rang } M = \text{Rang } \overline{M} = \text{núm. incòg} = 3$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënus, en aquest cas el sistema és *compatible determinat*.

CAS II: Si  $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \overline{M}$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënus, el sistema és *incompatible*.

CAS III:  $\lambda = -1$

$$M|\bar{M} = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } \bar{M} = 3$$

$$\text{Rang } M = 2 \quad \text{Rang } \bar{M} = 3$$

$$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \bar{M}$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënus, el sistema és *incompatible*.

El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre  $\lambda$ :  $\lambda = 0$  i  $\lambda = -1$ .

**b)** Resoleu el sistema per a  $\lambda = 1$ .

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array} \right)$$

De la tercera equació, tenim  $10z = 60$ , per tant,  $z = 6$ .

De la segona equació, tenim  $y+z = 10$ , per tant,  $y = 4$ .

De la primera equació, tenim  $x + y - z = 0$ , per tant,  $x = 2$ .

Solució:  $(x = 2, y = 4, z = 6)$ .

**Pautes de correcció:****a)**

0,25 punts per al determinant de la matriu de coeficients i per als valors crítics.

0,25 punts per a la discussió del cas  $\lambda = -1$ .0,25 punts per a la discussió del cas  $\lambda = 0$ .

0,25 punts per a la resposta a la pregunta.

**b)**

0,25 punts per al sistema particular (i la indicació de SCD, si és el cas, que no cal).

0,25 punts per al valor de la  $x$ .0,25 punts per al valor de la  $y$ .0,25 punts per al valor de la  $z$ .

2.

*a)*

Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , aleshores el seu vector normal,  $n = (A, B, C)$  haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals  $n_1 = (5, -1, -7)$  i  $n_2 = (2, 3, 1)$ .

$$\text{Així doncs } n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17).$$

El pla tindrà la forma  $20x - 19y + 17z = D$ , però si ha de passar per l'origen de coordenades  $(0,0,0)$ , aleshores  $D = 0$  i el pla buscat serà  $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$ .

*b)* L'angle entre els dos plans serà l'angle que formin els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\begin{aligned} \boxed{\alpha} &= \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha((5, -1, -7), (2, 3, 1)) = \arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \\ &= \arccos \frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \arccos 0 = \boxed{90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}}. \end{aligned}$$

Els dos plans són perpendiculars.

### **Pautes de correcció:**

*a)*

- 0,25 punts pel plantejament de perpendicularitat entre vectors normals.
- 0,25 punts pel producte vectorial.
- 0,25 punts per la forma inicial del pla.
- 0,25 punts per l'equació final del pla.

*b)*

- 0,25 punts per l'angle a partir de l'angle entre els vectors normals.
- 0,25 punts per la formulació de l'angle.
- 0,25 punts pel producte escalar.
- 0,25 punts per la perpendicularitat (o l'angle de  $90^\circ$ , sense indicar perpendicularitat).

3.

a)

La resposta depèn del signe de  $k$ .

- Si  $k < 0$ , aleshores  $x^2 - k > 0$  per a qualsevol valor de  $x$  i, per tant,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  i la funció  $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$  és contínua perquè no s'anul·la el denominador i no té cap asymptota vertical.  
Com que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - k} = 0$ , la funció té una asymptota horitzontal en l'eix de les  $x$ ,  $y=0$ .
- Si  $k > 0$  aleshores  $x^2 - k$  s'anul·la per als valors  $\pm\sqrt{k}$  i, per tant,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{k}\}$  i la funció  $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$  tindrà dues asymptotes verticals, en  $x = +\sqrt{k}$  i en  $x = -\sqrt{k}$ .  
Com que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - k} = 0$ , la funció té una asymptota horitzontal en l'eix de les  $x$ ,  $y=0$ .

b)  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - k)^2} = 0$  si  $x = 0$ , amb independència del valor de  $k$ .

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2 - k)^2 - (-2x)2(x^2 - k)2x}{(x^2 - k)^4} = \frac{(-2)(x^2 - k) + 8x^2}{(x^2 - k)^3} = \frac{6x^2 + 2k}{(x^2 - k)^3}$$

Com que  $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$ ,

$f$ , per tant, té un màxim relatiu en el punt  $(0, \frac{-1}{k})$  i no té mínims relatius.

Observació: En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció  $f$  a l'entorn de  $x = 0$ .

### Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel domini i no AV quan  $k < 0$

0,25 punts pel domini i AV quan  $k > 0$

0,25 punts per la AH quan  $k < 0$

0,25 punts per la AH quan  $k > 0$

b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona o el raonament equivalent sobre el creixement o decreixement.

0,25 punts per la classificació del punt i la resposta final.

4.

**a)**

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que  $\text{rang}M = \text{rang}M' = 3$

$$\text{amb } (M|M') = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que  $\text{rang}M=3$  cal que  $\text{Det } M \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que  $a \neq 0$

**b)** Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre  $a$ ) és:  $\left( \frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$

**Pautes de correcció:****a)**

0,25 punts per la condició de Rouché-Frobénius.

0,25 punts pel determinant de l'associada.

0,25 punts pel valor singular.

0,25 punts pel raonament final.

**b)**

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Cramer o mètode equivalent.

0,25 punts pel càlcul de la  $x$ .0,25 punts pel càlcul de la  $y$ .0,25 punts pel càlcul de la  $z$ .



5.

**a)**

Per a comprovar que una matriu  $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$  és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament,  $|M| = x^2 - (-1)(y^2 + 1) = x^2 + y^2 + 1$ , que és sempre diferent de 0, ja que  $x^2 + y^2 \geq 0$  en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables  $x$  i  $y$ .

**a)** Per a  $x = 1$  i  $y = -1$ , tenim  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Tindrem  $M^{-1} = \frac{1}{|M|} (\text{Adj}M)^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

### **Pautes de correcció:**

**a)**

0,5 punts pel plantejament a partir del determinant no nul (o del rang 2).

0,5 punts per provar que el determinant és sempre diferent de 0.

**b)**0,25 punts per l'expressió de  $M$ .

0,25 punts per la formulació del càlcul de la matriu inversa.

0,5 punts pel càlcul final.

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que  $a^2 = x^2 + h^2$ . Com que el volum del con val  $120 \text{ cm}^3$ , per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim  $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$ . Substituint  $x^2$  a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de  $h$ , per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan  $h \in (0, \infty)$ . Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar  $F'(h) = 0$ , s'obté  $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$ ,  $h^3 = \frac{180}{\pi}$  i  $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3,86 \text{ cm}$ .

Es comprova que és un mínim, ja que  $f'(x) < 0$  quan  $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$  i  $f'(x) > 0$  quan  $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$ .

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

**Pautes de correcció:****a)**

0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.

0,25 punts per la igualtat derivada del volum.

0,25 punts per aïllar la  $x$ .

0,25 punts per la substitució final.

**b)**

0,25 punts per l'argumentació de la funció a minimitzar.

0,25 punts per la derivada de la funció.

0,25 punts pel punt singular (en forma radical o amb l'expressió decimal).

0,25 punts per la classificació del punt singular (com a la proposta de resolució o a partir del signe de la derivada segona).