SOLUCIONES

OPCION A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax+2y+6z=0$$
$$2x+ay+4z=2$$
$$2x+ay+6z=a-2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso a = 0.

Solución

El determinante del sistema es igual a. $2(a^2-4)$, igualando a cero obtenemos los valores a = 2 y a = - 2

Por tanto:

1. para a ≠ 2 y -2 , El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO
2. Para a = 2 , el rango de la matriz es 2, y el rango de matriz ampliada también es 2, por tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO
3. Para a = -2., los rangos de las matrices son 2 y 3, por tanto el sistema es INCOMPATIBLE.

Para el caso a = 0 sabemos que tiene solución y resolviendo nos da: x = 5, y =6, z = -2

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos A(0, 2, 3) y B(-1, 1, 1), encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto M(1, 0, 1) sea la misma que la distancia de P al punto N(0, 4, 2).

Solución

Hay varias maneras de resolver el problema, una de ellas es hallar el plano mediatriz de los punto M y N e intersecarlo con la recta que pasa con A y B.

Plano mediatriz: x-4y-z+9=0 (pasa por el punto medio de MN y tiene como vector normal MN). La recta en paramétricas tiene por ecuación (t, 2+t, 3+2t).

La intersección del plano y la recta nos da el punto P(-2/5, 8/5,11/5)

Otra manera es plantear la condición de equidistancia y resolver la ecuación resultante, esto es : $(t-1)^2+(2+t)^2+(3+2t-1)^2=t^2+(2+t-4)^2+(3+2t-2)^2$

Resolviendo tenemos t =-2/5, por tanto el punto es P(-2/5, 8/5,11/5).

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y=2x-10$ **es tangente a la gráfica de la función** $f(x)=x^3+Ax^2+Bx-1$ **en el punto P(1,-8).**

- **c) Calcula los valores de A y B.**
- **d) Calcular los puntos de corte de la función f(x) con la recta de ecuación** $y=-15x-1$**.**

Solución

c) La derivada de la función es : $f'(x)=3x^2+2Ax+B$. Al imponer la condición que la recta tangente a la curva en el punto x = 1 tenga por pendiente 2, nos queda la condición: $3+2A+B=2$.
Por otra parte el punto P(1,-8) pertenece a la curva, por tanto : $1+A+B-1=-8$.
Resolviendo las dos condiciones nos da A = 7 y B =-15.
La curva es por tanto $f(x)=x^3+7x^2-15x-1$

d) Los puntos de corte serán los que resulten de resolver la ecuación: $x^3+7x^2-15x-1=-15x-1$. De donde $x^3+7x^2=0$, dando lugar a dos soluciones x = 0 (raiz doble) y x = -7.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral $\int (x+5)e^{3x}\,dx$

Solución

La integral $\int (x+5)e^{3x}\,dx$ se puede resolver por partes:

Llamando $\begin{aligned} u &= x+5 \\ dv &= e^{3x}dx \end{aligned}$ obtenemos $\begin{aligned} du &= dx \\ v &= \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned}$

Por tanto
$$\int (x+5)e^{3x}dx=(x+5)\frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx$$

Resolviendo:
$$\int (x+5)e^{3x}dx=(x+5)\frac{e^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C$$

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Solución
Si el primero de los números es x, podemos plantear la siguiente ecuación:
$x+(x+1)+(x+2)+...(x+43)+(x+44)=1890$

De dónde $45x+(1+2+3+...+43+44)=1890$. Resolviendo x = 20 (es el primer número), y el último es 64.

SOLUCIONES

Ejercicio B1

Calcula para qué valor o valores de x admite inversa la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) En caso de existir, calcula la inversa de A para x= -3

Solución

a) Para que SI sea inversible la matriz A se ha de cumplir que su determinante sea distinto de cero. Por tanto : $5-x^2=0$: nos dará los valores para los que NO existe inversa, esto para $x=\pm\sqrt{5}$ NO admite inversa.

b) La matriz inversa para el caso x = 3 es :

$$A^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x-3y+z=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x-y+3z-5=0 \ ,$$

y que pasa por el punto P(2, 6, 5)

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida

Solución

c) Hay varias formas de resolver el problema. La recta pedida será perpendicular a los vectores normales de ambos planos, luego su dirección coincidirá con el producto vectorial de los vectores(1, -3, 1) y (2, -1, 3) . El producto vectorial de ambos vectores nos da: el vector (-8,-1, 5).
Por tanto la recta pedida es :

$$\frac{x-2}{-8}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{5}$$

d) Para calcular la distancia de la recta al primer plano usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano. En nuestro caso:

$$d=\frac{|2-3.6+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$$

Ejercicio B3

Dada la función

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}$$

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?
c) Hallar todas las asíntotas de la función

Solución

d) Es claro que la función no existe en x=0.
La derivada de la función es igual a

$y'=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$, por tanto tendrá un máximo o mínimo cuando x=2, se comprueba que es un MINIMO.

e) La función será creciente cuando $y'=\frac{x^3-8}{x^3}\geq 0$

Se verificará para los valores $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

f) Tiene dos asíntotas:

Vertical $x = 1$
Oblicua $y = x$

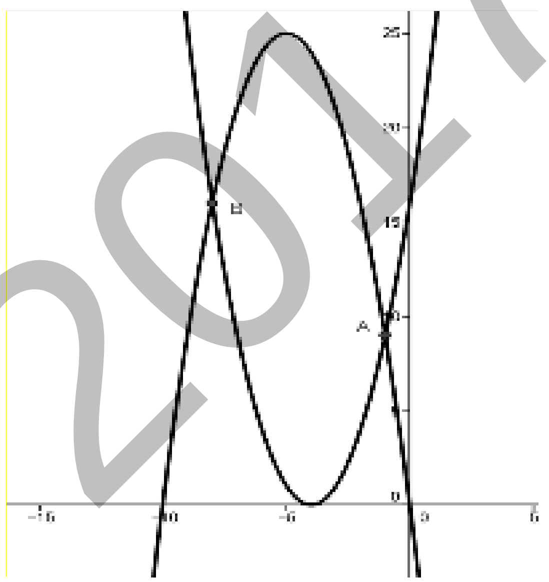
No tiene asintotas horizontales.

Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las parábolas, realizando un dibujo del recinto.

$$y = -x^2 - 10x \quad ; \quad y = (x+4)^2 .$$

Solución
Las dos parábolas se cortan en los puntos A (-1, 9) y B(-8, 16)



$$Area = \int_{-8}^{1} ((-x^2 - 10x) - (x^2 + 8x + 16))dx = \frac{343}{3}$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.
Contestar razonadamente a la siguiente pregunta:
¿ es Z múltiplo de 10 ?

Solucíón:
Si observamos las terminaciones de las potencias sucesivas de 2 (evidentemente las potencias de 6 siempre acaban en 6 y las potencias de de 5 acabarán en 5) obtenemos:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

....

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

Nos indica que las potencias de 2 se van repitiendo en “ciclos de 4”. Por tanto si dividimos 2017 entre 4 y nos fijamos en el resto (que es 1), resolveremos el problema de las potencias de 2.

Así tenemos que las unidades del número 2^{2017} será 2 , y la cifra de las unidades de N será 3 (la suma de las unidades de 2+5+6)

Razonando de manera similar obtenemos las unidades de Z (observemos que N acaba en 3).

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

....

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

Por tanto las unidades de Z nunca pueden acabar en cero y por tanto **Z no puede ser múltiplo de 10.** Evidentemente se podría razonar que Z no es múltiplo de 10 una vez conocida la terminación de N.