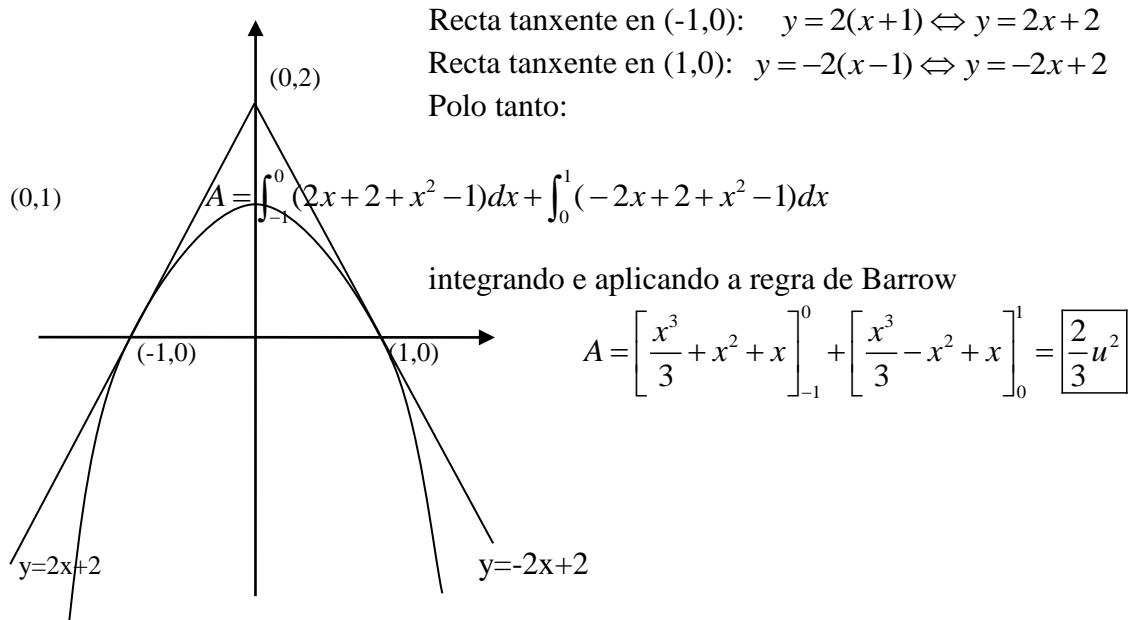


# Exemplos de resposta / Soluciones

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{2x \cos(x^2)} \stackrel{0/0}{=} L'Hôpital \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

- 4) parábola:  $y = -x^2 + 1$
- vértice : (0,1)  
Puntos corte eixe 0X: (-1,0), (1,0)  
 $y' = -2x; y'' = -2 < 0$  cóncava



## OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes  $(C) = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; Matriz ampliada  $(A) = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left| \begin{array}{ccc} C & = & 2m+4 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & = & -2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 \\ m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 \end{array} \right.$$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$$m \neq -2, \quad 3 = \text{rang}(C) \leq \text{rang}(A) \leq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

pero para  $m = -2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Así,  $\text{rang}(A) = 3, \forall m$

# Exemplos de resposta / Soluciones

Discusión do sistema:

- $m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$ . Sistema incompatible. Non ten solución.
- $m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ}$  incógnitas Sistema compatible determinado.  
Solución única.

b) Caso  $m = 0$ . Queda un sistema homoxéneo e como estamos no caso dun sistema compatible determinado, a única solución é a trivial:  $x = y = z = 0$

Caso  $m = -1$ . Tamén estamos no caso dun sistema compatible determinado e a solución única podémola obter por Cramer:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2} = -\frac{3}{2}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{2} = 1$$

2) a) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das rectas  $r$  e  $s$ :

$$P_r(3,0,-6); \quad \vec{v}_r = (-3, -4, 0)$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (12, 16, 20). \text{ Consideramos } \vec{v}_s = (3, 4, 5); \quad P_s(3,0,-1)$$

Podemos estudar a posición relativa utilizando rangos:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{As rectas córtanse ou crúzanse.}$$

$$\text{Pero como } \text{rang} \begin{pmatrix} \vec{P}_r \vec{P}_s \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2, \text{ as rectas son secantes.}$$

Punto de corte:

$$\begin{aligned} 4(3-3\lambda) + 12\lambda - 12 &= 0 \\ -20\lambda + 24 - 4 &= 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(0, -4, -6) \end{aligned}$$

O ángulo que forman as rectas podemos calculalo como:

$$\alpha = \square(r, s) = \arccos \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|} = \arccos \frac{|-9 - 16|}{\sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{9 + 16 + 25}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \pi/4$$

b) Como as rectas son secantes, están contidas nun plano:

$$(0, -4, -6) \in \pi \quad \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r, \vec{v}_s \text{ vectores de } \pi \\ \hline \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = -3\lambda + 3\mu \\ y = -4 - 4\lambda + 4\mu \\ z = -6 + 5\mu \end{cases}$$

# Exemplos de resposta / Soluciones

3)  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow g(x)=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \boxed{x=2} \text{ As\'intota vertical}$$

Non existen as\'intotas horizontais pois  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$

C\'alculo da as\'intota oblicua:

$$\left. \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x + 2$$

C\'alculo dos puntos cr\'iticos:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Intervalos de crecimiento e decrecimiento:

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$g'(x)$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$> 0$
$g(x)$	creciente	decreciente	decreciente	creciente

$g(x)$  \'e crecente nos intervalos  $(-\infty, 0)$  e  $(4, +\infty)$  e  $g(x)$  \'e decreciente nos intervalos  $(0, 2)$  e  $(2, 4)$ .

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$  M\'aximo relativo:  $(0, 0)$

$g''(4) = 1 > 0 \Rightarrow$  M\'ınimo relativo:  $(4, 8)$

$g''(x) \neq 0$  e polo tanto a funci\'on non ten puntos de inflexi\'on.

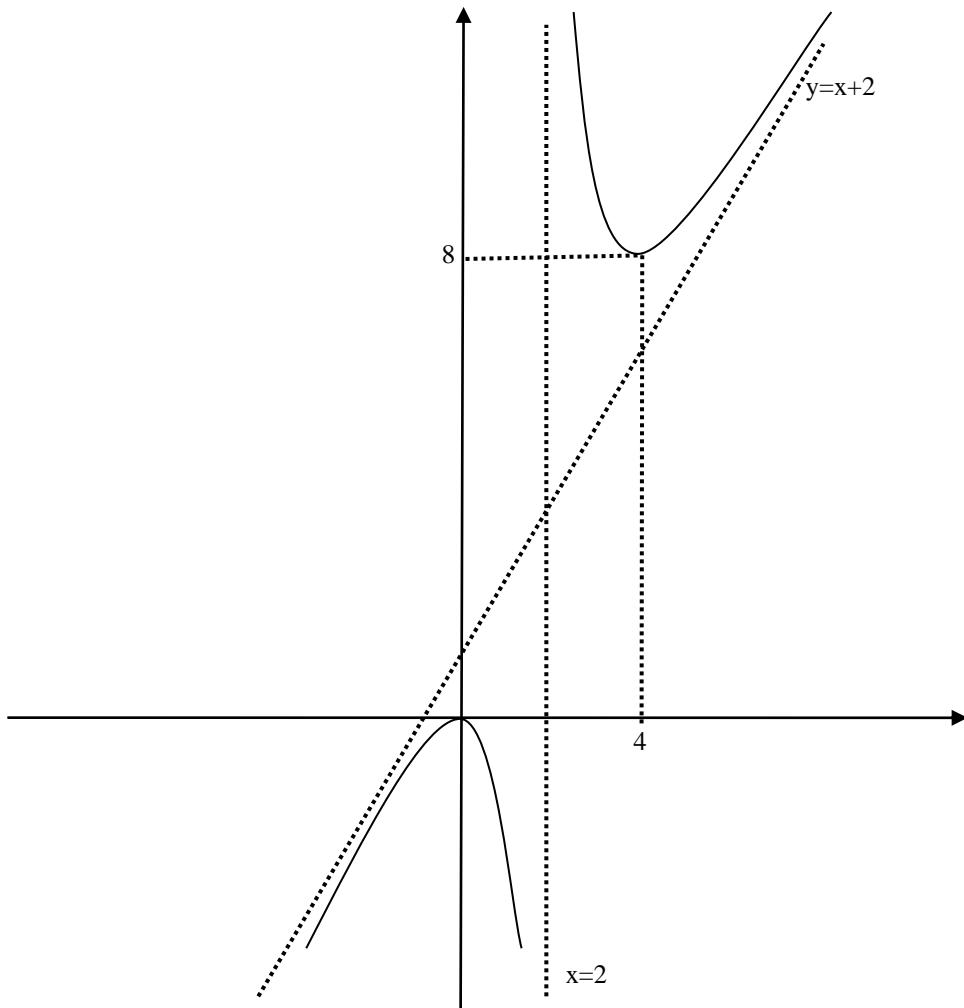
Intervalos de concavidade e convexidade:

$x$	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$g''(x)$	$< 0$	$> 0$
$g(x)$	c\'oncava	convexa

$g(x)$  \'e convexa no intervalo  $(2, +\infty)$   
e c\'oncava no intervalo  $(-\infty, 2)$

Con todos estes datos, a gr\'afica de  $g(x)$  ser\'a:

# Exemplos de resposta / Soluciones



4) a) Utilizamos o método de integración por partes:

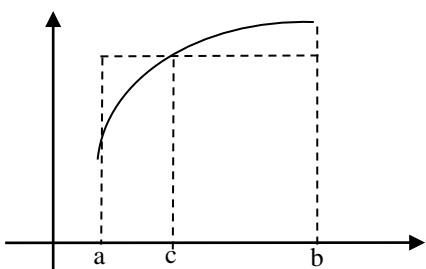
$$\left. \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do denominador, facemos a división dos polinomios. Así:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \left( x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}$$

b) Se  $f(x)$  é unha función continua nun intervalo  $[a,b]$ , existe un punto  $c \in (a,b)$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Interpretación xeométrica: A área encerrada pola gráfica de unha función continua nun intervalo fechado, o eixo OX e as rectas  $x=a$ ,  $x=b$  é igual á área dun rectángulo de base  $b-a$  e altura  $f(c)$ , sendo  $f(c)$  o valor que toma a función nun punto intermedio  $c$ .