CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 4\alpha + 9\alpha - 2 + 2 = 5\alpha$$

Polo tanto:

- Se $\alpha \neq 0, rang(C) = 3$
- Se $\alpha = 0, rang(C) = 2$

Como sempre $rang(A) \geq rang(C)$ e o sistema será compatible indeterminado cando $rang(C) = rang(A) = 2$, calculamos $rang(A)$ cando $\alpha = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 4 + 18 = 0 \Rightarrow rang(A) = 2, se\ \alpha = 0$$

Polo tanto, o sistema é compatible indeterminado cando $\boxed{\alpha = 0}$.

Cando $\alpha = 0$, un sistema equivalente é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = \ \ 5 - 3z \\ x - 3y = -4 - 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = 9 - z \ \Rightarrow \ x = 23 - 5z$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 23 - 5\lambda \\ y = \ 9 - \ \ \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \qquad \lambda \end{cases}}$$

b) Do apartado anterior deducimos que

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ incógnitas$. Sistema compatible determinado, solución única.

Polo tanto, $\boxed{o\ sistema\ sempre\ ten\ solución}$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio2:

a) Utilizando as propiedades do producto escalar de dous vectores, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{v}+\vec{w}|^2 &= <\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}> \;=\; <\vec{v},\vec{v}> + <\vec{w},\vec{w}> + 2<\vec{v},\vec{w}> \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) \end{aligned}$$

é dicir:

$$196 = 36 + 100 + 120\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$$

e polo tanto

$$\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\pi}{3}}$$

b) Calculamos o vector director, $\vec{v}_r$, da recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

O plano queda determinado polos elementos:

- O punto $A(-1,5,0)$
- Os vectores $\vec{v}_r = (-6,9,6)$ e $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ que son paralelos ao plano e independentes entre si. (En lugar do vector $(-6,9,6)$ podemos considerar o $(-2,3,2)$ xa que $(-6,9,6)||(-2,3,2)$).

$$\boxed{Ecuacións\ paramétricas: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = 5 + 3\lambda - 4\mu \\ z = 2\lambda + \mu \end{cases}}$$

Para obter a ecuación xeral, podemos eliminar os parámetros λ e μ nas ecuacións paramétricas ou ben calcular a ecuación do plano a partir dun punto do plano (por exemplo o $A(-1,5,0)$ e un vector normal ao plano $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (-2,3,2)\times(1,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Polo tanto, a *ecuación xeral* do plano é:

$$11(x+1) + 4(y-5) + 5z = 0 \;\Longrightarrow\; \boxed{11x + 4y + 5z - 9 = 0}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio3:

a)

- $f(x)$ é continua en $x<1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x>1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a-1 \end{array}\right\}$$

Para que sexa continua en $x=1$, debe ser $a-1=2/a \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=-1$ ou $a=2$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ \text{é}\ continua\ se\ a=-1\ \ ou\ \ a=2}$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x=1$, só teremos que facelo cando $a=-1$ ou $a=2$

Caso: $a=-1$

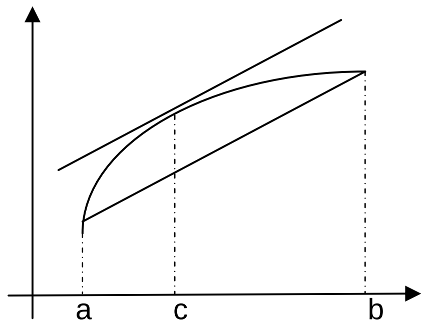
$$f'(x)=\begin{cases} -2x & se\ x<1 \\ 2/_{x^2} & se\ x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = \ \ 2 \end{array} \quad \Rightarrow \text{ Non é derivable en } x=1.$$

Caso: $a=2$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & se\ x<1 \\ -1/_{x^2} & se\ x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \text{ Non é derivable en } x=1$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ non\ \text{é}\ derivable\ en\ x=1\ para\ ning\text{ú}n\ valor\ de\ a}$.

b) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*: Se $f(x)$ é continua en [a,b] e derivable en (a,b), entón existe algún punto c∈(a,b) tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica: Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos (a,f(a)) e (b,f(b)).

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

É a integral dunha función racional. Como o grao do numerador é igual ao grao do denominador, en primeiro lugar facemos a división para obter unha fracción cuxo numerador sexa de grao inferior ao denominador:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} = 5 + \frac{2x+1}{x^3 - x}$$

Calculamos as raíces do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \Rightarrow \text{Raíces: } 0,\ 1,\ -1.$$

Son todas raíces reais sinxelas, facemos a descomposición:

$$\frac{2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+1)}$$

Como os denominadores son iguais, os numeradores deben ser iguais:

$$\begin{array}{lll} A+B+C=0 & (coeficiente\ de\ x^2) & \\ B-C=2 & (coeficiente\ de\ x) & \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -1/2 \end{cases} \\ -A=1 & (termo\ independente) & \end{array}$$

A integral queda:

$$\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x}dx = \int_2^3 \left[5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x}\right]dx = \int_2^3 \left[5 - \frac{1}{x} + \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right]dx$$

$$= \left[5x - ln|x| + \frac{3}{2}ln|x-1| - \frac{1}{2}ln|x+1|\right]_2^3$$

$$= 15 - ln3 + \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln4 - \left(10 - ln2 - \frac{1}{2}ln3\right)$$

$$\boxed{Solución = 5 - 1/2\ ln3 + 3/2\ ln2}$$