CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$|C| = -2 - m + 2m + 2 + 1 - 2m^2 = -2m^2 + m + 1$

$2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

Polo tanto

Se $m = 1$ ou $m = -1/2$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \neq 1$ e $m \neq -1/2$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = 1$ e para $m = -1/2$; (nos demais casos, o rango é 3, pois sempre $rang(C^*) \geq rang(C)$ e C^* ten 3 filas).

$\underline{m = 1} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$\underline{m = -1/2} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 - 4 + 2 + 1 = -3/2 \neq 0;$

Entón
$m = 1 \Rightarrow rang(C^*) = 2$
$m \neq 1 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$m = -1/2 \Rightarrow rang(C) = 2 \neq 3 = rang(C^*)$. Sistema incompatible. Non ten solución
$m = 1 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.
$m \neq -1/2$ e $m \neq 1 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$. Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = 1}$
Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} -y + z = -x \\ -y + 2z = 1 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1 - x;\ y = 1$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \lambda & \\ y = 1; & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda & \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son linealmente independentes e están contidos no plano π. Polo tanto, o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ten a dirección da recta r:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,4,-2)$$

E podemos tomar como $\vec{v}_r = (1,-2,1)$. Tendo en conta que a recta pasa pola orixe de coordenadas, as súas ecuacións paramétricas serán:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}}$$

b) Tendo en conta que un punto da recta é $P_r(0,0,0)$, a distancia do punto $P(a,a,a)$ á recta r ven dada por:

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{v_r}\|}{\|\overrightarrow{v_r}\|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\|(3a,0,-3a)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18a^2}}{\sqrt{6}} = |a|\sqrt{3}$$

O plano π pasa polo punto $A(1,0,2)$ e os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son dous vectores contidos no plano, polo tanto a súa ecuación xeral é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - 2y + z - 3 = 0$$

e a distancia do punto $P(a,a,a)$ ao plano π é:

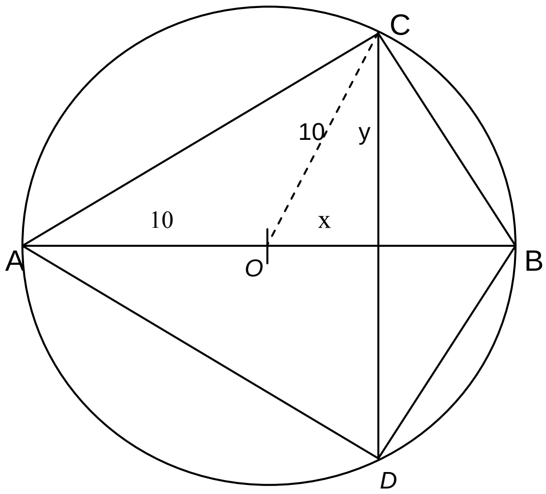
$$d(P,\pi) = \frac{|a-2a+a-3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Polo tanto,

$$d(P,r) = d(P,\pi) \quad \Leftrightarrow |a|\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\pm a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:



Triángulo ADC:
Base: $2y$
Altura: $10 + x$

$Área\ =\ y(10 + x)$

Triángulo BCD:
Base: $2y$
Altura: $10 - x$

$Área\ =\ y(10 - x)$

Diferencia de áreas:

$A_1 - A_2\ = y(10 + x) -\ y(10 - x) = 2xy$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$y =\ \sqrt{10^2 - x^2}$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$f'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100 - x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow\ x = \pm 5\sqrt{2}$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$f''(x) =\ -\ \frac{2x}{\sqrt{100-\ x^2}} - \frac{4x\sqrt{100-\ x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100-\ x^2}}}{100-\ x^2}$; $\ \ f''(5\sqrt{2}\,) =\ -\ \frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\ -\ \frac{200\ + 100}{50} =\ -8 < 0$

$\boxed{Solución: 5\sqrt{2}\ cm.}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 + ax - 1$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, xa que é unha función polinómica. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$. Para aplicar Rolle neste intervalo, debemos impoñerlle a condición $f(0)=f(1)$

$f(0)=f(1) \quad \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Un punto do intervalo $(0,1)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe OX, será un punto do intervalo no que se anule a primeira derivada (a existencia dese punto está garantida polo teorema de Rolle)

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1;$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pero $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ non é un punto do intervalo $(0,1)$. Polo tanto:

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+3}{x^2-x} = x + 1 + \frac{x+3}{x^2-x}$

Como $x^2 - x = x(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow A = -3; B = 4$

Entón:

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx = \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C$$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C}$$