MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{\equiv}{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{array}\right)$$

La matriz del sistema es siempre de **rango** 2 y el de la ampliada será 3, salvo el caso

$$3-3a=0 \qquad \Longrightarrow \qquad a=1$$

Luego para $\boldsymbol{a=1}$ las matrices tienen rango 2, **sistema compatible indeterminado**. Para el resto de valores el **sistema es incompatible**.

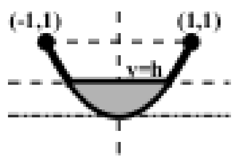
Para $a=1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} y=-2x \\ z=1 \end{array}\right.$$

$$(x,y,z)=(\lambda,-2\lambda,1) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

---

2. Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y=x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h)=\dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

---

a) Los puntos de corte de la recta $y=h$ y la parábola serán:

$$\left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=h \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad x^2=h \quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{h} \quad\Longrightarrow\quad A(-\sqrt{h},h) \qquad B(\sqrt{h},h)$$

luego el área vendrá dada por la integral

$$S(h)=\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\left(h-x^2\right)\,dx=\left[hx-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}=\frac{4h\sqrt{h}}{3}\,m^2$$

b) El volumen del abrevadero en función de h será

$$V(h) \;=\; 6 \times S(h) \;=\; 8h\sqrt{h}\, m^3$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego lo que nos piden es calcular h tal que

$$V(h) \;=\; 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 8h\sqrt{h} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63\, m}$$

---

3. Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ z = 1 \end{array} \right.$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C. (1.5 puntos)
b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

a) Calculemos la expresión de un punto C de la recta r y un vector director $\vec{v}_r$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y,z) = (4,0,1) + \lambda(0,1,0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} C\ (4,\lambda,1) \\ \vec{v}_r\ = (0,1,0) \end{array}$$

Se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad (4, \lambda - 1, 1) \cdot (0,1,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{C(4,1,1)}$$

b) El área del triángulo es

$$\text{Área triángulo} \;=\; \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \;=\; \frac{1}{2}|(-1,0,1) \times (4,0,1)| \;=\; \frac{1}{2}|(0,5,0)| \;=\; \boldsymbol{\frac{5}{2} = 2.5\; u^2}$$

---

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

Denotamos por N el dado normal y T el trucado, con probabilidades iguales: $P(N) = P(T) = 1/2$.
Los datos que tenemos son $P(5/N) = 1/6$ y $P(5/T) = 4/6$.

a) La probabilidad de sacar 5 está determinada por el dado elegido

$$P(5) = P(5 \cap N) + P(5 \cap T) = P(5/N)P(N) + P(5/T)P(T) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12} = 0.4167}$$

b) Nos piden la probabilidad $P(T/5)$. Para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$P(T/5) = \frac{P(T \cap 5)}{P(5)} = \frac{P(5/T) \cdot P(T)}{P(5)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \boldsymbol{\frac{4}{5} = 0.8}$$

OPCIÓN B

---

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

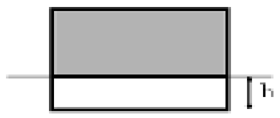
Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\equiv}{\overset{F_2 = F_2 - 2F_1}{F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
b) Como hay 4 columnas y el rango es 3 tiene que existir alguna columna combinación de las otras. Por ejemplo, se observa que **la segunda columna es el triple de la tercera**.
c) Si el rango de la matriz es 3, las 3 filas tienen que ser independientes. Luego **no existe** fila combinación lineal de las restantes.

---

2. Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



Considerando como variables, en metros, x la anchura e y la altura de la valla, el área sombreada es:

$$\text{Área } = x(y-h)$$

con

$$2x + 2y = 20 \iff y = 10 - x \qquad\qquad h = \frac{x}{5}$$

Por tanto, la función a maximizar es

$$f(x) \;=\; x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) \;=\; x\left(10 - \frac{6}{5}x\right)$$

$$f'(x) \;=\; 10 - \frac{12}{5}x$$

$$f'(x) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{25}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{35}{6}$$

$$f''(x) \;=\; -\frac{12}{5} \qquad\qquad f''\left(\frac{25}{6}\right) < 0 \Longrightarrow \qquad \textbf{máximo}$$

La solución es:

$$\boldsymbol{x = \frac{25}{6} = 4.1667\,m} \qquad\qquad \boldsymbol{y = \frac{35}{6} = 5.8333\,m}$$

---

3. Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s : \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right.$

a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

---

a) Calculemos primero las ecuaciones de la recta r

$$r \ : \ (x,y,z) = A + \lambda\overrightarrow{AB} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(-1,-1,-1) = (2-\lambda, 1-\lambda, -\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \end{array} \right.$$

Para determinar la posición de las rectas se estudia el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \overset{F_3 = F_3 - F_1}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \overset{\substack{F_3 = F_3 - 2F_2 \\ F_4 = F_4 - F_2}}{\equiv}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Se tiene un sistema compatible determinado. Por tanto, las rectas **se cortan en un punto**.

b) Un punto C de la recta s es del tipo

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2-y \\ z = -y \end{array} \right. \Longleftrightarrow (x,y,z) = (2-\lambda, \lambda, -\lambda) \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad C(2-\lambda, \lambda, -\lambda)$$

Y para que cumpla la condición de perpendicularidad

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda, 1-\lambda, \lambda) \cdot (\lambda - 1, -\lambda, \lambda - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

salen dos posibles valores de C

$$\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(2,0,0)} \qquad\qquad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(1,1,-1)}$$

---

4. Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el baloncesto y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (1 punto)

b) Se eligen 100 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol. (0.75 puntos)

c) Si en el apartado anterior la muestra hubiese sido de 10 alumnos, y no de 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que exactamente a 5 les gustase el fútbol? (0.75 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x) \quad x \geq 0$. $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.125) = 0.8697$, $F(1) = 0.8413$)

Denotamos por F $(P(F) = 0.8)$ los seguidores del equipo de fútbol, B $(P(B) = 0.4)$ los del equipo de baloncesto.

a) Nos piden $P(F \cup B)$. Si $P(F \cap B) = 0.3$ se tiene que

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = \mathbf{0.9}$$

b) Sea X la variable aleatoria *ser seguidor del equipo de fútbol* que según el planteamiento del apartado sigue una distribución binomial $B(100, 0.8)$. Los datos que tenemos son acordes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 100 \geq 30 \qquad n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 \geq 5 \qquad n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 \geq 5$$

Por tanto podemos utilizar una v.a. X' que sigue una distribución normal

$$\mu = n \cdot p = 80 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 4 \qquad N(80, 4)$$

$$P(X \leq 75) = P(X' \leq 75 + 0.5)$$

si tipificamos la variable nos queda en términos de la normal $N(0, 1)$

$$P(X' \leq 75.5) = P\left(Z \leq \frac{75.5 - 80}{4} = -1.125\right) = 1 - P\left(Z \leq 1.125\right) = 1 - 0.8697 = 0.1303$$

c) En este caso

$$n = 10 < 30 \qquad n \cdot p = 10 \cdot 0.8 = 8 \geq 5 \qquad n \cdot q = 10 \cdot 0.2 = 2 < 5$$

no se cumplen las tres condiciones para aproximar la binomial por una normal. Luego aplicamos directamente la distribución binomial $B(10, 0.8)$

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}(0.8)^5 \cdot (0.2)^5 \ = \ 0.0264$$