Modelo de examen RESUELTO

MATERIA: *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A - B \cdot C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 2$.

Solución:

a) Puesto que

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} my - 1 \\ mx - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B \cdot C = \begin{pmatrix} x - my + 1 \\ y - mx - 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A - B \cdot C = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & my & = & -1 \\ -mx & + & y & = & 1 \end{array} \right.$$

b) La discusión de este sistema es hecha habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \end{array} \right)$$

Como $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ se tiene que:

  - Si $m = -1$, la última fila representa una ecuación que es imposible ($0x + 0y = 2$), con lo que el sistema es imcompatible
  - Si $m = 1$, entonces la última fila es $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, por lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Longleftrightarrow m = \pm 1$$

se tiene que:

  - Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  por lo que el sistema es incompatible.

- Para $m = 1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$

  el sistema es compatible indeterminado.
- Si $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	*S.I.*
$m = 1$	*S.C.I.*
$m \neq \pm 1$	*S.C.D.*

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq -1$ y dicha solución es única si además $m \neq 1$.

Si $m = 2$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 2$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & -1 \\ & - & 3y & = & -1 \end{array} \right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1/3 \\ x = -1/3 \end{array} \right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 1 - m^2$, con lo que si $m = 2$ se tiene que $|A| = -3$.
  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{-3} = -1/3, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-1}{-3} = 1/3.$$

Evidentemente, cual otro método usado que haya sido debidamente justificado, será admitido como válido.

---

2. El beneficio mensual de una empresa (f), en miles de euros, se relaciona con las toneladas de producto vendido (x) tal como sigue:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ 1805 & \text{si } 10 < x \end{array} \right.$$

a) **[1 punto]** ¿Es el beneficio una función continua de la cantidad de producto vendido?

b) **[1,25 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f.

c) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es el beneficio mensual mínimo? ¿Puede llegar algún mes a tener unos beneficios de 1900 miles de euros? ¿y de 1815 miles de euros?

Solución:

a) f es una función continua en $(0,10)$ y en $(10,\infty)$, por estar definida por funciones continuas. Queda pues por estudiar la continuidad de f en $x=10$:

- La función está definida en 10, siendo $f(10)=10\cdot 10-\frac{5\cdot 10^2}{4}+1800=1775$.
- Como

$$\lim_{x\to 10^-} f(x)=\lim_{x\to 10^-} 10x-\frac{5x^2}{4}+1800=1775 \quad \text{y} \lim_{x\to 10^+} f(x)=\lim_{x\to 10^+} 1805=1805$$

  la función tiene límite finito tanto por la izquierda como por la derecha, pero ambos no coindicen, con lo que no existe el límite en $x=10$.

De todo lo anterior se deduce que f es continua en $(0,10)\cup(10,\infty)$.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $(0,\infty)$.

Como $10x-\frac{5x^2}{4}+1800=0 \Leftrightarrow -5x^2+40x+7200=0 \Leftrightarrow -x^2+8x+1540=0 \Leftrightarrow x=\frac{-16\pm\sqrt{8^2-4(-1)1540}}{-2}$, es decir, $x=-31{,}45$ o $x=47{,}45$. Pero como ninguno de estos dos valores pertenecen al intervalo $(0,10]$, se puede decir que f no se anula en ese intervalo. Tampoco lo hace en $(10,\infty)$, puesto que toma el valor constante $1805>0$. De lo anterior se deduce que la función no corta el eje de abscisas.

Además hemos visto en el apartado anterior que es discontinua en $x=10$.

En cuanto a las asíntotas, tiene sentido calcular

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 1805=1805.$$

Vamos a continuar estudiando la monotonía de esta función:

- En el primer trozo, $f'(x)=10-\frac{5x}{2}=0 \Leftrightarrow x=4$. Como $f'(2)=5>0$, f es creciente en el intervalo $(0,4)$; por otro lado, como $f'(6)=-5<0$, f es decreciente en el intervalo $(4,10)$.
- En el segundo trozo, es una constante ($f'(x)=0, \forall x\in(10,\infty)$).

Así pues la función crece hasta el 4 y decrece a partir de él hasta el 10, donde pasa a ser constante.

Por otro lado se tiene que $f(4)=1820$ y que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1800$.

En cuanto a la derivada segunda, como en el primer trozo $f''(x)=-\frac{5}{2}$, se tiene que $f''(4)=-5/2<0$, con lo que 4 es un máximo relativo.

Además, para los intervalos de concavidad:

- En el primer trozo, $f''(x)=-\frac{5}{2}<0, \forall x\in(0,10)$, con lo que es cóncava hacia abajo en ese intervalo.
- En el segundo trozo, como ya se comentó, es constante.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la Figura 1.

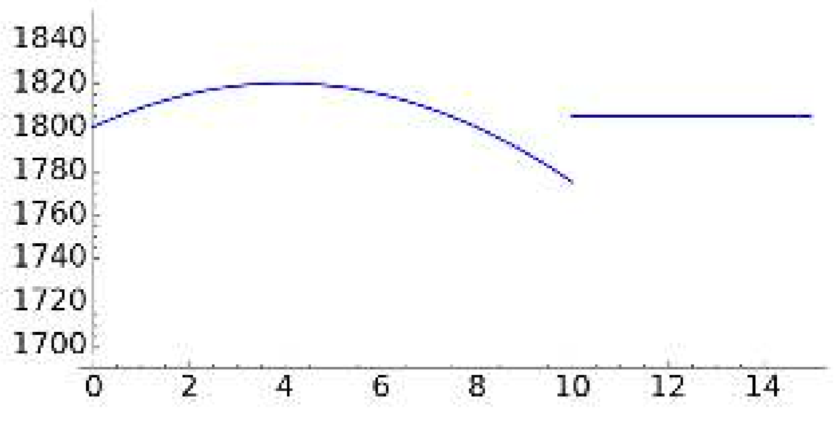


Figura 1: Representación gráfica de $f(x)$.

c) El mínimo absoluto se tiene en el punto $x = 10$, con lo que el beneficio mensual mínimo se alcanza si se venden 10 toneladas de producto y dicho beneficio es de 1775 miles de euros.

Como se puede observar en el estudio de la función hecho en el apartado anterior, $x = 4$ es un máximo absoluto por lo que el valor máximo de f se alcanza en el punto $x = 4$ y es de 1820 miles de euros, con lo que no puede llegar a ser de 1900 miles de euros.

De 1815 sí podría ser, alcanzándose este valor cuando se hayan vendido 2 o 6 toneladas de producto, puesto que $10x - \frac{5x^2}{4} + 1800 = 1815 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = 6$.

---

3. El 80 % de los clientes de un hotel viaja por motivos laborales. De ellos, el 50 % son españoles. Para los que no viajan por motivos laborales, el porcentaje de españoles es el 25 %.

a) **[1 punto]** De entre los clientes del hotel, ¿qué porcentaje son españoles?

b) **[1 punto]** De entre los clientes españoles, ¿qué porcentaje no viaja por motivos laborales?

Solución: Si denotamos por L el suceso «el cliente viaja por motivos laborales» y por E el suceso «el cliente es español», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{array}{l} P(L) = 0{,}8 \\ P(E/L) = 0{,}5 \\ P(E/\overline{L}) = 0{,}25 \end{array}$$

a) $P(E) = P(E \cap L) + P(E \cap \overline{L}) = P(E/L)P(L) + P(E/\overline{L})P(\overline{L}) = 0{,}5(0{,}8) + 0{,}25(0{,}2) = 0{,}45 \approx 45\,\%$.

b) $P(\overline{L}/E) = \frac{P(\overline{L} \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}25(0{,}2)}{0{,}45} = 1/9 \approx 11{,}1\,\%$.

---

4. En un estudio sobre el gasto diario por turista en una determinada región, se tomó una muestra aleatoria de 3600 turistas, para los que su gasto medio diario fue de 68 euros. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40, se pide:

a) **[1 punto]** Construir un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse el verdadero gasto medio diario a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 euro y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:
Si denotamos por X la v.a. «gasto diario», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 40$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 40)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 3600$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 68$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\overline{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el gasto medio diario de los turistas de esa región, al 95 % de confianza es:

$$\left(68 - 1{,}96\frac{40}{\sqrt{3600}}, 68 + 1{,}96\frac{40}{\sqrt{3600}}\right) = (66{,}69, 69{,}31),$$

puesto que $\overline{x} = 68$, $n = 3600$, $\sigma = 40$ y el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}95$ o lo que es lo mismo, el valor $z_{\alpha/2}$ tal que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}975$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 95 % de que el gasto medio diario de los turistas de esa región está entre 66,69 y 69,31 euros.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 1$ y $1-\alpha = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}96\frac{40}{1}\right)^2 = 6146{,}56,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 6147 turistas.

OPCIÓN B

1. Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros, y también se exige que los extranjeros sean, por lo menos, un 10 % del total de personas entrevistadas.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían ser entrevistados 1000 españoles?

b) **[1 punto]** Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de españoles y extranjeros entrevistados, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 2300 \\ y & \leq & 1000 \\ y & \geq & 0{,}1(x+y) \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 2300 \\ y & \leq & 1000 \\ x-9y & \leq & 0 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la Figura 2. Los extremos de dicho recinto son $A = (1300, 1000)$, $B = (2070, 230)$ y $C = (9000, 1000)$.

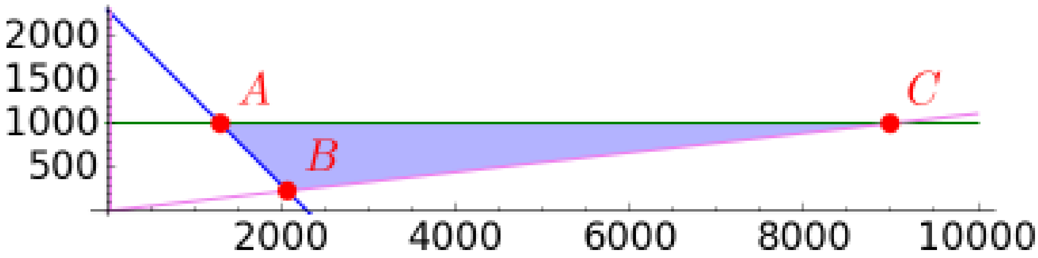


Figura 2: Región factible.

No podrían ser entrevistados 1000 españoles, puesto que el punto $(1000, y)$ no pertenece a la región factible para ningún valor de $y \in [0, \infty)$.

b) El coste de la encuesta es $6(x+y)$, puesto que cada encuesta cuesta 6 euros y el número de personas encuestadas es $x+y$. Así, queremos maximizar la función objetivo $z = 6(x+y)$ sujeto a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A) = 13800 \text{ euros}$$
$$z(B) = 13800 \text{ euros}$$
$$z(C) = 60000 \text{ euros}$$

por lo que el coste máximo se alcanza si se entrevistan a 9000 españoles y 1000 extranjeros, siendo dicho coste de 60000 euros.

2. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 6x$.

a) **[0,75 puntos]** Encuentra la primitiva F de f que verifica que $F(1) = 10$.

b) **[2,25 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f. Calcula el área delimitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) Como $f(x) = 3x^2 - 6x$, entonces $F(x) = x^3 - 3x^2 + C$, con lo que $F(1) = -2 + C = 10 \Leftrightarrow C = 12$ y $F(x) = x^3 - 3x^2 + 12$.

b) El dominio de f son todos los números reales, puesto que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(-x) = 3x^2 + 6x, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0,0)$. Además como $f(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o $x = 2$, se tiene que f corta al eje de abcisas en los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 - 6x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 - 6x = \infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 6x}{x} = +\infty.$$

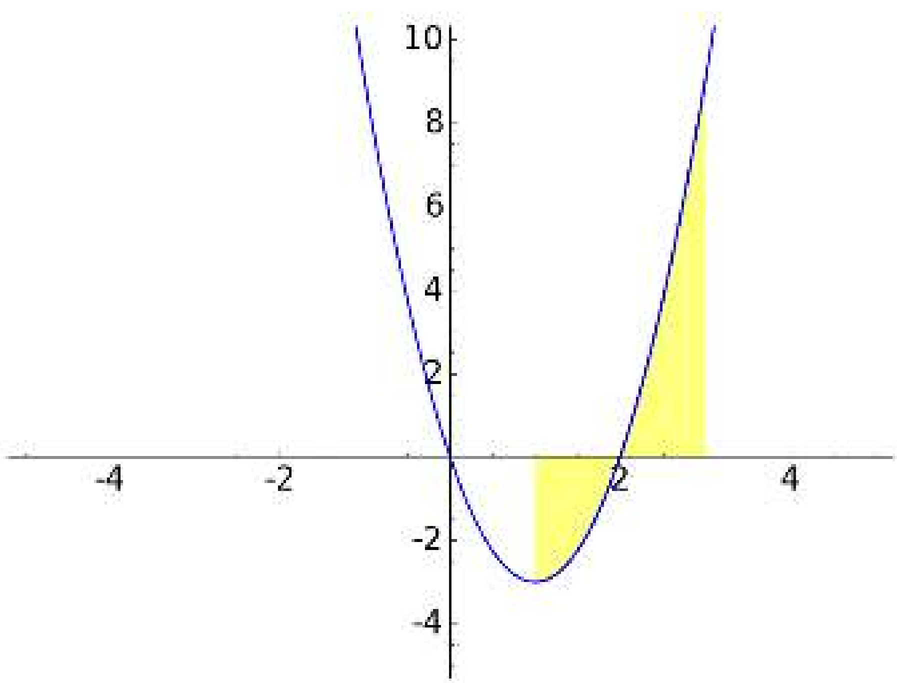
Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x) = 6x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

Para averiguar si este punto es un mínimo o un máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $f''(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x = 1$ es un mínimo relativo. De lo anterior se deduce que f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. Para poder representar el mínimo en el plano, es necesario calcular su imagen: $f(1) = 3\,1^2 - 6\,1 = -3$.

Como los puntos de inflexión de f son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, sabemos que no existen dichos puntos y como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que f es cóncava hacia arriba (convexa).

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es:



El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$ es igual a:

$$\left|\int_1^2 f(x)dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)dx\right| = |F(2) - F(1)| + |F(3) - F(2)| = |8 - 10| + |12 - 8| = 6.$$

---

3. De los turistas que visitaron Asturias el año pasado, el 5 % eran españoles y viajaban en avión. Además se sabe que un 20 % eran extranjeros y que el 25 % de los que viajaron en avión eran españoles.

a) **[1 punto]** Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

b) **[1 punto]** Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en avión?

Solución: Si denotamos por E el suceso «el turista es español» y por A el suceso «el turista viaja en avión», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E \cap A) = 0{,}05$$
$$P(\overline{E}) = 0{,}2$$
$$P(E/A) = 0{,}25$$

a) Como $P(E/A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)}$, se tiene que $P(A) = \frac{P(E\cap A)}{P(E/A)} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2$, con lo que la probabilidad de que un turista elegido al azar haya viajado en avión es 0,2.

b) Si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es $P(A/\overline{E})$ que por definición de probabilidad condicionada se puede calcular como

$$P(A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}$$

Pero como por el teorema de la probabilidad total se tiene que $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap \overline{E})$, entonces $P(A \cap \overline{E}) = P(A) - P(A \cap E) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$, entonces la probabilidad pedida es

$$P(A/\overline{E}) = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75,$$

es decir, si seleccionamos un turista al azar entre los extranjeros, la probabilidad de que haya viajado en avión es 0,75.

---

4. Tras poner en marcha unos programas de prevención de tabaquismo en la universidad, se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria, la proporción actual de fumadores en la universidad.

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de fumadores en la universidad a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,02 y un nivel de confianza del 90 %?

b) **[1 punto]** Si se toma una muestra aleatoria de 2000 universitarios, de los que se obtiene que 180 son fumadores, obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de fumadores en la universidad.

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

a) Al estimar la proporción poblacional de fumadores en la universidad (p), el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon} \right)^2$$

donde ε representa el error de estimaciónl. El error de estimación viene dado por $\varepsilon \leq 0{,}02$, pero el valor de la proporción poblacional p no es conocido, de hecho es el valor que queremos estimar. En ese caso, se considera el valor que maximiza la desviación típica y, por tanto, el error de estimación, es decir, $p = 0{,}5$.

Por otro lado, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$. Como $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9$, $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, es decir, $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64\frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}02}\right)^2 = 41^2 = 1681$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 1681 universitarios.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de fumadores de los $n = 2000$ universitarios en la muestra, se tiene que $\hat{p} = 180/2000 = 0{,}09$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de universitarios que fuman, al 90 % de confianza es:

$$\left(0{,}09 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{2000}}, 0{,}09 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{2000}}\right) = (0{,}08, 0{,}10),$$

puesto que $\hat{p} = 0{,}09$, $n = 2000$ y ya vimos que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de fumadores en la universidad está entre el 8 % y el 10 %.